Autour de la conjecture d'André-Oort.

Emmanuel Ullmo

Table des matières

1 Introduction

Le but de ce texte est de présenter la preuve de la conjecture d'André-Oort sous l'hypothèse de Riemann généralisée, (GRH dans la suite), pour les produits de courbes modulaire due à Edixhoven [24] et d'introduire les outils nécessaires à la compréhension de la preuve de cette conjecture pour une variété de Shimura arbitraire, sous GRH, due à Klingler, Yafaev et l'auteur de ces notes ([61], [31]). Les grandes lignes de la preuve de ces résultats sont présentées dans le texte compagnon de Yafaev dans ce volume. Ces deux textes sont les versions écrites et détaillées d'un cours donné en commun au CIRM en mai 2011 sur le sujet.

Il y a quatre parties correspondants aux quatre exposés oraux donnés par l'auteur du texte sur les huit du cours commun en question. Voici une très brève description du contenu de ces notes, la table des matières donnant une idée plus précise des thèmes abordés

La première partie présente la preuve due à Edixhoven de la conjecture d'André-Oort sous GRH pour les produits de courbes modulaires. Nous essayons de dégager les étapes qui se retrouvent dans la preuve du cas général.

La deuxième partie introduit les notions de bases de la théorie des variétés de Shimura. L'accent est mis sur les ingrédients intervenant dans l'énoncé et la preuve de la conjecture d'André-Oort sous GRH. On insiste particulièrement sur les définitions et propriétés des sous-variétés spéciales et on explique certaines propriétés dues à Edixhoven et Yafaev d'irréductibilité d'image de sous-variétés des variétés de Shimura par des opérateurs de Hecke.

Dans les deux dernières sections on développe les outils nécessaires à la compréhension de la partie ergodique de la preuve de la conjecture d'André-Oort sous GRH. On explique en particulier les principes de bases de la théorie ergodique sur "$\Gamma\backslash G(\mathbb{R})$" pour un réseau arithmétique Γ d'un groupe algébrique. Les résultats de Ratner sur la dynamique des flots unipotents sont décrits. Le théorème d'équidistribution des sous-variétés fortement spéciales est expliqué dans la dernière section.

Notons enfin que les progrès récents sur la conjecture d'André-Oort sans GRH impulsés par Pila sont décrit dans ce volume dans la contribution de Scanlon.

2 La conjecture d'André-Oort pour un produit de courbes modulaires.

Le but de cette partie est de décrire la preuve d'Edixhoven [23] [24] de la conjecture d'André-Oort sous GRH pour un produit de courbes modulaires. La plupart des énoncés obtenus dans ce cadre s'étendent aux variétés de Shimura arbitraires. La stratégie ainsi dégagée par Edixhoven a donc été centrale dans tous les travaux postérieurs sur la conjecture d'André-Oort sous GRH.

2.1 La conjecture d'André-0ort pour un produit de 2 courbes modulaires.

2.1.1 Courbes modulaires.

Nous nous intéresserons dans cette partie à la variété de Shimura la plus simple : la courbe modulaire

$$Y_0(1) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$$

où $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Im(z)} > 0\}$ est le demi-plan de Poincaré et

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})|\ ad - bc = 1\}$$

est le groupe modulaire.

Un des intérêts principaux des variétés de Shimura est que l'on dispose de deux descriptions de nature différentes qui donnent des informations complémentaires. Les variétés de Shimura sont des **espaces localement symétriques hermitiens** et des **espaces de modules pour des "objets intéressants"** (typiquement des variétés abéliennes ou plus généralement des structures de Hodge). Nous développerons ces deux points de vue pour une variété de Shimura générale dans la section 3. Nous nous contenterons de donner dans cette partie ces descriptions pour la courbe modulaire.

La description de $\mathbb{H}$ comme espace symétrique hermitien est donnée par

$$\mathbb{H} = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/K_\infty$$

où

$$K_\infty \simeq \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = \{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R}\}$$

est un sous-groupe compact maximal de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

On a une action par homographies de $GL_2(\mathbb{R})^+$ sur $\mathbb{H}$, donné pour $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ et $z \in \mathbb{H}$ par

$$\alpha.z = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Dans cette description

$$K_\infty = \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Fix}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}(\sqrt{-1}),$$

de sorte que l'isomorphisme $SL_2(\mathbb{R})/\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{H}$ est donné par $g.\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \mapsto g.\sqrt{-1}$.

Soit B le sous-groupe de Borel de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ des matrices triangulaires supérieures. Au vu de la décomposition d'Iwasawa $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = B\ \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ on peut préciser l'isomorphisme précédent :

$$\begin{pmatrix} y^{\frac{1}{2}} & xy^{\frac{-1}{2}} \\ 0 & y^{\frac{-1}{2}} \end{pmatrix} .\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \mapsto z = x + \sqrt{-1}y.$$

On dispose d'une mesure $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$-invariante $\mu = \frac{dxdy}{y^2}$ sur $\mathbb{H}$. Le groupe modulaire $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ agit de manière proprement discontinue sur $\mathbb{H}$ et le quotient $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$ est de μ-volume fini $\frac{\pi}{3}$. On dit que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est un réseau de $\mathbb{H}$ (par analogie avec le cas des variétés abéliennes) et le quotient d'un espace symétrique hermitien par un réseau est par définition un espace localement symétrique hermitien.

L'invariant j donne un isomorphisme $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H} \to \mathbb{C} = \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ et muni $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$ d'une structure de variété algébrique quasi-projective.

Du point de vue modulaire $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$ est un espace de module pour les classes d'isomorphismes de courbes elliptiques sur $\mathbb{C}$. Dans cette description on associe à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\tau$ la courbe elliptique $E_\tau \simeq \mathbb{C}/\Gamma_\tau$ sur $\mathbb{C}$ où Γ_τ désigne le réseau $\mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}$ de $\mathbb{C}$. Il est classique que toute courbe elliptique sur $\mathbb{C}$ est de la forme $E \simeq E_\tau$ pour un $\tau \in \mathbb{H}$ et que deux courbes elliptiques E_τ et $E_{\tau'}$ sont isomorphes (comme surfaces de Riemann de genre 1 avec une origine) si et seulement si il existe $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ tel que $\tau' = \gamma\tau$.

Il existe enfin un **modèle canonique** $Y_0(1)_{\mathbb{Q}}$ sur $\mathbb{Q}$ qui est un espace de module grossier pour les courbes elliptiques sur $\mathbb{Q}$ (voir [20]). On a donc un isomorphisme $Y_0(1)_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{C} \simeq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$ et $Y_0(1)_{\mathbb{Q}} \simeq \mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}}$.

2.1.2 Multiplication complexe des courbes elliptiques.

Soit E une courbe elliptique sur $\mathbb{C}$. On sait que $E = \mathbb{C}/\Lambda$ pour un réseau Λ de $\mathbb{C}$. Un endomorphisme de $\mathbb{C}$ est donné par la multiplication par un élément $z \in \mathbb{C}$ tel que $z\Gamma \subset \Gamma$. Si $\mathrm{End}(E) = \mathbb{Z}$, on dit que E est sans multiplication complexe. C'est la situation **générique**, un terme auquel on donnera un sens précis dans le cadre des variations de structures de Hodge à la section 3.1.4. Si ce n'est pas le cas, $\mathrm{End}(E)$ est un ordre dans un corps quadratique immaginaire F. Soit O_F l'anneau des entiers de F, alors un ordre dans F est de la forme

$$O_{F,f} = \mathbb{Z} + fO_F$$

pour un entier $f \geq 1$. On note $\mathrm{Pic}(O_{F,f})$ le groupe de Picard (i.e. le groupe de classes) de $O_{F,f}$. Quand $\mathrm{End}(E) = O_{F,f}$, on dit que E est à multiplication complexe par $O_{F,f}$. Pour plus de détails et certaines preuves le lecteur peut consulter [52] et [56] ch. XI.

Proposition 2.1 *L'ensemble $\Sigma_{F,f}$ des classes d'isomorphismes de courbes elliptiques E telles que $\mathrm{End}(E) = O_{F,f}$ est un $Pic(O_{F,f})$-torseur. Il est en particulier fini de cardinal $h_f := |Pic(O_{F,f})|$*

Une conséquence qui nous sera utile est donné par le théorème de de Brauer-Siegel ([32] ch. XVI).

Théorème 2.2 *Soit E une courbe elliptique à multiplication complexe par $O_{F,f}$, alors*

$$|\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/K).E| = |Pic(O_{F,f})| = |disc(\mathrm{End}(E))|^{\frac{1}{2}+o(1)}$$

quand $|disc(\mathrm{End}(E))| \to \infty$.

Soit Λ un $O_{F,f}$-module projectif de rang 1, alors $E = \mathbb{C}/\Lambda$ a multiplication complexe par $O_{F,f}$. Si Λ et Λ' sont deux tels $O_{F,f}$-module projectif de rang 1 alors $\mathbb{C}/\Lambda \simeq \mathbb{C}/\Lambda'$ si et seulement si Λ et Λ' ont la même classe dans $\mathrm{Pic}(O_{F,f})$. Réciproquement soit $E = \mathbb{C}/\Lambda$ ayant multiplication complexe par $O_{F,f}$, alors $\Lambda = \pi_1(E, O)$ est un $O_{F,f}$-module de rang 1 dont les endomorphismes sont exactement $O_{F,f}$. Ceci entraine que Λ est projectif de rang 1.

L'opération de $\mathrm{Pic}(O_{F,f})$ sur $\Sigma_{F,f}$ est donné par

$$\Lambda.\mathbb{C}/\Lambda' = \mathbb{C}/\Lambda \otimes_{O_{F,f}} \Lambda'.$$

On dispose alors du théorème classique suivant est

Théorème 2.3 *Soit E à multiplication par $O_{F,f}$.*

(1) $j(E)$ est un entier algébrique dans l'extension abélienne maximale de F non ramifiée en dehors de f.

L'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)$ sur $\Sigma_{F,f}$ est donnée par un homomorphisme surjectif dit de réciprocité $r = r_{F,f} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F) \to Pic(O_{F,f})$. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier non ramifié dans $O_{F,f}$ et $F(\mathfrak{p})$ le Frobenius correspondant alors

$$r(F(\mathfrak{p})) = [\mathfrak{p}]^{-1}.$$

Autrement dit

$$(\mathbb{C}/\Lambda)^{F(\mathfrak{p})} = \mathbb{C}/\Lambda \otimes_{O_{F,f}} \mathfrak{p}^{-1}.$$

Le lecteur pourra consulter le texte de Serre [52] pour la preuve de cet énoncé.

Il est utile d'avoir une interprétation adélique du morphisme de réciprocité via la théorie du corps de classe. Soit $\mathbb{A}_{F,f}$ l'anneau des adèles de F. On a un isomorphisme

$$F^*\backslash\mathbb{A}^*_{F,f}/(\widehat{\mathbb{Z}}\otimes O_{F,f})^* \simeq Pic(O_{F,f}).$$

et un morphisme

$$r : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F) \to F^*\backslash\mathbb{A}^*_{F,f}/(\widehat{\mathbb{Z}}\otimes O_{F,f})^*$$

tel que $r(F(\mathfrak{p}))$ est l'idèle dont l'unique composante non triviale est l'inverse $\pi_{\mathfrak{p}}^{-1}$ de l'uniformisante en $\mathfrak{p}$.

Lemme 2.4 *Soit $F=\mathbb{Q}[\sqrt{-d}]$ pour un entier positif d sans facteurs carrés. On réalise $\Sigma_{F,f}$ comme un sous-ensemble de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$. Soit $l=\mathfrak{l}\mathfrak{l}'$ un nombre premier totalement décomposé dans $O_{F,f}$, l'action de $[\mathfrak{l}]$ sur $\Sigma_{F,f}$ est donné par*

$$[\mathfrak{l}].\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})x = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})g_x.x,$$

pour un $g_x \in GL_2(\mathbb{Q})^+$ de déterminant l.

On rappelle que pour tout nombre premier l, on a la décomposition :

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\begin{pmatrix}1&0\\0&l\end{pmatrix}\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \coprod_{0\le a<l}\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\begin{pmatrix}1&a\\0&l\end{pmatrix}\coprod\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\begin{pmatrix}0&1\\-l&0\end{pmatrix}.$$

L'opérateur de Hecke T_l est la correspondance de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$ donnée par l'action de la double classe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\begin{pmatrix}1&0\\0&l\end{pmatrix}\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Explicitement

$$T_l.\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\tau = \{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\frac{a+\tau}{l}\}_{0\le a<l}\coprod\{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})l\tau\}$$

Le théorème des diviseurs élémentaires nous assure qu'une matrice de déterminant l dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ appartient à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\begin{pmatrix}1&0\\0&l\end{pmatrix}\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. On peut reformuler et préciser le lemme 2.4 de la manière suivante.

Lemme 2.5 *Avec les hypothèses et notations du lemme 2.4, on a*

$$[\mathfrak{l}].\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})x \in T_l \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})x. \tag{1}$$

De plus l'élément g_x *du lemme 2.4 n'est pas dans* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -l & 0 \end{pmatrix}$.

La première partie est une réécriture de la discussion précédente. Pour la deuxième partie il suffit de voir que si $x = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\tau$ est un point correspondant à une courbe elliptique à multiplication par un ordre $O_{F,f}$ de discriminant d et si l ne divise pas d alors $x' = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})l\tau$ correspond à une courbe elliptique à multiplication par $O_{F,fl}$ de discriminant fl^2.

Pour prouver cela on rappelle que les points $\tau \in \mathbb{H}$ tels que E_τ est CM par un ordre de discriminant d est en correspondance biunivoque avec les formes quadratiques binaires définies positives $Q(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ de discriminant $d = b^2 - 4ac$. La correspondance associe à une telle forme quadratique Q, la racine $\tau = \frac{-b+\sqrt{d}}{2a}$ de partie imaginaire positive de $Q(x,1) = 0$. Dans cette description $l\tau$ correspond à la forme binaire $ax^2 + blxy + cl^2y^2$ de discriminant dl^2.

2.1.3 Théorème de Chebotarev effectif.

Nous utiliserons la forme suivante du théorème de Chebotarev effectif sous l'hypothèse de Riemann généralisée. Le lecteur est encouragé à consulter le texte de Serre [53] pour la preuve et des applications du résultat suivant.

Proposition 2.6 *On suppose vraie l'hypothèse de Riemann généralisée pour les corps de nombres. Soit* M *une extension Galoisienne de degré* n *sur* $\mathbb{Q}$. *Soit* $A = A_M$ *un ordre de l'anneau d'entiers* O_M *dont la valeur absolue du discriminant est* $d = d_A$. *Soit* $\pi_A(x)$ *le nombre de nombres premiers* $p \leq x$ *qui sont non ramifiés dans* A *et totalement décomposés dans* A. *Pour* x *plus grand qu'une constante absolue et*

$$x > 2(\log d)^2(\log\log d)^2$$

on a

$$\pi_M(x) \geq \frac{x}{3n\log x}$$

Si n est borné, il existe une constante A tel que pour x plus grand qu'une constante absolue et

$$x > 2(\log d)^2(\log\log d)^2$$

il existe un nombre premier l tel que $x < l < A.x$ qui est non ramifié et totalement décomposé dans A_M. Cela résulte du fait que le nombre de nombres premiers qui sont ramifiés dans A_M est $o(\log d)$ et de l'estimation $\pi(x) \simeq \frac{x}{\log x}$ pour le nombre de nombres premiers plus petit que x..

2.1.4 La conjecture pour un produit de 2 courbes modulaires.

Dans cette partie

$$S = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H} \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H} \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{C}.$$

Les sous-variétés spéciales dans ce cas sont, les couples (x_1, x_2) de points CM, les variétés de la formes $\{x\} \times \mathbb{C}$ (ou de la forme $\mathbb{C} \times \{x\}$) pour un point CM x et l'image dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ de la courbe modualire

$$Y_0(N) = \Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H}$$

où $\Gamma_0(N) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), c \equiv 0\ [mod]N\}$.

Rappelons que $Y_0(N)$ est la courbe modulaire paramétrisant les isogénies cycliques d'ordre N, $\phi : E_1 \to E_2$ entre courbes elliptiques. Dans cette description le morphisme de $Y_0(N)$ vers $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ est juste

$$(E_1 \to E_2) \mapsto (j(E_1), j(E_2)).$$

Il est aussi connu que le corps des fonctions $\mathbb{C}(Y_0(N))$ est $\mathbb{C}(j(z), j(Nz))$, de sorte que l'on dispose de deux morphismes

$$\alpha : Y_0(N) \to Y_0(1),\ \alpha(\Gamma_0(N).z) = j(z)$$

et

$$\beta : Y_0(N) \to Y_0(1),\ \beta(\Gamma_0(N).z) = j(Nz)$$

et l'image de $Y_0(N)$ par $(j(z), j(Nz))$ est la sous-variété spéciale envisagée. Dans la suite nous noterons $Y_0(N)$ l'image dans $\mathbb{C}^2$ de $Y_0(N)$.

Théorème 2.7 *(Edixhoven [23]) On suppose l'hypothèse de Riemann pour les corps quadratiques imaginaires. Soit C une courbe algébrique irréductible dans $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ dont les deux projections sont dominantes. On suppose que C contient un ensemble Zariski-dense de points $x=(x_1,x_2)$ à multiplication complexe. Alors $C=Y_0(N)$ pour un $N\in\mathbb{N}$.*

Comme C contient un un ensemble Zariski-dense de points définis sur $\overline{\mathbb{Q}}$, C est défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$. On remplace C par une union finie de conjugués sous $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ de sorte que C soit irréductible sur $\mathbb{Q}$ (mais pas géométriquement irréductible).

Soit $z_n=(z_{1,n},z_{2,n})$ une suite de points CM Zariski-dense dans C. Notons O_{F_n,f_n} et $O_{F'_n,f'_n}$ les anneaux de multiplication complexe de $z_{1,n}$ et $z_{2,n}$. On peut supposer sans perte de généralités que

$$d_n:=\max(|disc(O_{F_n,f_n})|,|disc(O_{F'_n,f'_n})|)\to\infty.$$

D'après le théorème de Chebotarev effectif sous l'hypothès e de Riemann (thm. 2.6 appliqué à l'ordre $O_{F_n,f_n}O_{F'_n,f'_n}$ de $F_nF'_n$) il existe l décomposé dans O_{F_n,f_n} et $O_{F'_n,f'_n}$ tel que

$$l\ll(\log d_n)^3.$$

Notons $\mathbf{T_l}=T_l\times T_l$, il existe alors d'après le lemme 2.4 un conjugué par Galois z_n^σ de z tel que

$$z_n^\sigma\in\mathbf{T_l}z_n.$$

Comme l'opérateur $\mathbf{T_l}$ est défini sur $\mathbb{Q}$, on en déduit que

$$O(z_n):=\{z_n^\theta,\ \theta\in\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})\}\subset C\cap\mathbf{T_l}C\}.$$

Si l'intersection $C\cap\mathbf{T_l}C$ est propre, l'inégalité de Bezout, le choix de l via le théorème de Chebotarev effectif (sous GRH) et le théorème de Brauer-Siegel assurent que

$$d_n^{\frac{1}{2}-\epsilon}\ll|O(z_n)|\ll\deg(C)\deg(\mathbf{T_l}C)\ll l^2\ll(\log d_n)^6. \tag{2}$$

Comme d_n tend vers l'infini, pour n assez grand $C\cap\mathbf{T_l}C$ n'est pas propre. Comme C est $\mathbb{Q}$-irréductible on a en fait

$$C\subset\mathbf{T_l}C. \tag{3}$$

La marge de manoeuvre dans Chebotarev montre que cette dernière inclusion est valable pour une infinité de l. Edixhoven en déduit dans son approche initiale que C est un $Y_0(N)$. Nous allons suivre cette approche initiale mais on peut remarquer que

(1) Pour tout l assez grand et pour toute composante géométrique C_1 de C qui n'est pas spéciale $\mathbf{T_l}C$ est irréductible. C'est une application d'un résultat ultérieur d'Edixhoven et Yafaev que nous expliquerons dans la section 3.4 car si C_1 n'est pas spéciale alors C_1 est Hodge générique.

(2) On peut aussi remarquer que si C_1 n'est pas spéciale alors il en est de même des autres composantes géométriques de C. On en déduit que $\mathbf{T_l}C$ a le même nombre de composantes que C pour l assez grand et donc que si $C \subset \mathbf{T_l}C$, on a en fait $C = \mathbf{T_l}C$.

(3) Il est facile de voir que l'orbite sous $\mathbf{T_l}$ de n'importe quel point est dense dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$. On a en fait le résultat plus précis suivant que nous n'utiliserons pas (voir [11], [14] pour une preuve et des généralisations en rang arbitraire).

Théorème 2.8 *Soit $x \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note*

$$\Delta_{l,x} = \frac{1}{\deg(T_l)} \sum_{y \in T_l.x} \delta_y$$

la mesure de probabilité obtenue comme la moyenne des mesures de Dirac δ_y pour $y \in T_l.x$. Alors quand l tend vers l'infini $\Delta_{l,x}$ converge faiblement vers la mesure de Poincaré normalisée $\mu = \frac{3}{\pi}\frac{dxdy}{y^2}$. Autrement dit, pour toute fonction continue bornée f sur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$,

$$\frac{1}{\deg(T_l)} \sum_{y \in T_l.x} f(y) \to \int_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}} f.\mu.$$

En combinant (1), (2) et (3), on voit que les composantes de C sont spéciales.

Le point (1) est moins élémentaire que les autres arguments. C'est une conséquences d'un théorème de Deligne et André sur les variations de structure de Hodge et d'un résultat de Nori. Pour garder cette partie aussi élémentaire que possible nous expliquons dans la suite l'approche initiale d'Edixhoven qui a par ailleurs inspiré d'autres développements ultérieurs.

On note $T_{l^n}(l)$ l'opérateur de Hecke sur $Y_0(l) = \Gamma_0(l)\backslash\mathbb{H}$ défini par la double classe

$$\Gamma_0(l) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & l^n \end{pmatrix} \Gamma_0(l).$$

Un calcul simple ou une lecture détaillée du livre de Miyake [38] montre que

$$\Gamma_0(l)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & l^n\end{pmatrix}\Gamma_0(l) = \coprod_{0\leq a<l^n}\Gamma_0(l)\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & l^n\end{pmatrix},$$

de sorte que $T_{l^n}(l)$ est une correspondance de degré l^n et que pour tout entier $n\geq 1$,

$$T_{l^n}(l) = (T_l(l))^n.$$

Une application du lemme 2.5 nous donne le résultat rafiné suivant :

Lemme 2.9 *Notons $\pi_l : \Gamma_0(l)\backslash\mathbb{H} \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$ correspondant à l'inclusion $\Gamma_0(l)\subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Soit $P\in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$ un point à multiplication complexe par $O_{F,f}$ et $\tilde{P}\in Y_0(l)$ tel que $\pi_l(\tilde{P}) = P$. Soit l un nombre premier décomposé dans $O_{F,l}$ et $\sigma\in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)$ correspondant à un idéal maximal divisant l. On a*

$$\tilde{P}^\sigma \in T_l(l)\tilde{P}.$$

Revenons à la preuve du théorème. Soit C_l une composante $\mathbb{Q}$-irréductible de $(\pi_l\times\pi_l)^{-1}C\subset Y_0(l)\times Y_0(l)$. Soit c un entier. On note $T_{\mathbf{l^c}}(l) = T_{l^c}(l)\times T_{l^c}(l)$. La preuve des équations (2) et (3) combinée au lemme précédent donne

$$C_l \subset \mathbf{T_l}C_l.$$

Noter que l'indice de $\Gamma_0(l)$ dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est $l+1$.

Corollaire 2.10 *Il existe une composante géométriquement irréductible Z de C_l et un entier c tel que*

$$Z\subset T_{\mathbf{l^c}}(l)Z$$

En effet si $Z_1,\dots,Z_r$ sont les composantes géométriquement irréductibles de C_l, on a des inclusions de la forme

$$Z_1\subset \mathbf{T_l}(l)Z_{i_1}\subset \mathbf{T_l}(l)\mathbf{T_l}(l)Z_{i_2} = T_{\mathbf{l^2}}(l)Z_{i_2}\subset\dots\subset T_{\mathbf{l^r}}(l)Z_{i_r}$$

Il existe alors des indices $i_k < i_l$ tels que $Z_{i_k} = Z_{i_l}$. On prend alors $Z = Z_{i_k}$ et on voit que $Z\subset T_{\mathbf{l^c}}(l)Z$ avec $c = i_l - i_k$.

Notons

$$\pi : \mathbb{H}\times\mathbb{H}\to \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}\times \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$$

et

$$\pi' : \mathbb{H}\times\mathbb{H}\to \Gamma_0(l)\backslash\mathbb{H}\times\Gamma_0(l)\backslash\mathbb{H}$$

les projections naturelles et fixons une composante irréductible X de la sous-variété analytique $(\pi')^{-1}Z$. Soit $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})\times\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ et $G_X = Stab_G(X)$. On va montrer que G_X est le graphe d'un automorphisme intérieur de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Comme l'action de G sur $\mathbb{H}\times\mathbb{H}$ est algébrique, G_X est un sous-groupe analytique.

Lemme 2.11 *Les noyaux des projections de G_X vers $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sont discrets.*

Soit $K = Stab_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})\times\{1\}}(X)$. Pour tout $\tau\in\mathbb{H}$, K stabilise

$$X_\tau := X\cap\mathbb{H}\times\{\tau\}.$$

Comme la projection de C sur le deuxième facteur est dominante, X_τ est discret. La composante connexe K^0 de K stabilise donc tous les éléments de X_τ. Le stabilisateur de τ dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact maximal de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, donc est un conjugué de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = Fix_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}(\sqrt{-1})$. Comme la projection de C sur le premier facteur est dominante, K^0 est contenu dans l'intersection de tous les conjugués de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ qui est $\{\pm 1\}$.

Lemme 2.12 *Soit $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\times\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ et $\Gamma_X = G_X\cap\Gamma$. Soit d_i le degré des projections de C vers $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$. L'indice de la i-ème projection $p_i(\Gamma_X)$ dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est borné par par d_i.*

On a une factorisation $\pi : \mathbb{H}\times\mathbb{H}\to\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}\times\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$ de la forme

$$\mathbb{H}\times\mathbb{H}\to\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}\times\mathbb{H}\to\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}\times\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}.$$

On note Y l'image de X dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}\times\mathbb{H}$. Alors Y est une composante irréductible de l'image inverse Z de C dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}\times\mathbb{H}$. Comme C est le quotient de X par Γ_X, on voit que C est aussi le quotient de Y par $p_2(\Gamma_X)$. On en déduit que $p_2\Gamma_X$ est le stabilisateur dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ de $Y\subset Z$. Comme l'orbite sous-$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ de Y est l'ensemble des composantes irréductibles de Z, on voit que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/p_2(\Gamma_X)$ est l'ensemble des composantes irréductibles de Z. Par ailleurs Z est par définition le produit fibré

$$\begin{array}{ccc} Z & \to & \mathbb{H} \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \overset{p_2}{\to} & \mathbb{C} \end{array}.$$

En particulier Z a au plus d_2 composantes. L'argument pour la première projection est identique.

Notons que ces deux lemmes n'utilisent pas l'hyphothèse $Z\subset T_{\mathfrak{l}^c}(l)Z$. Le point clef est le résultat suivant.

Lemme 2.13 *Le groupe topologique G_X n'est pas discret.*

Le groupe G_X est fermé et contient Γ_X. L'hypothèse $Z \subset T_{l^{nc}}(l)Z$ pour tout entier n assure que G_X contient un élément de la forme

$$l^{-\frac{nc}{2}}\gamma\begin{pmatrix}1 & a_n\\ 0 & l^{nc}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1 & b_n\\ 0 & l^{nc}\end{pmatrix}$$

avec $0 \leq a_n < l^{nc}$, $0 \leq b_n < l^{nc}$ et $\gamma \in \Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Soit H le sous-groupe de G_X engendré par Γ_X et ces éléments et $\overline{H}$ sa fermeture. Les deux projections de H ne sont pas dicrètes donc H n'est pas discret.

Fin de la preuve. L'algèbre de Lie $Lie(G_X)$ est non triviale d'après le lemme précédent et les deux projections $p_i(Lie(G_x))$ sont normalisées par $p_i(\Gamma_X)$ qui sont Zariski-denses dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. On en déduit que $p_i(Lie(G_x)) = Lie(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))$ pour $i = 1$ et $i = 2$. Comme $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est connexe, G_X se projette surjectivement sur les deux facteurs $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Le noyau de $p_1 : G_X \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, est discret normal dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \{1\}$ et contient $\{\pm 1\}$ donc est égal à $\{\pm 1\}$. Par le lemme de Goursat, G_X est le graphe d'un automorphisme σ de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\{\pm 1\}$. Les automorphismes de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\{\pm 1\}$ sont intérieurs. Comme $p_i(\Gamma_X)$ est d'indice fini dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, σ provient d'un automorphisme intérieur de $\mathrm{SL}_{2,\mathbb{Q}}$. Le groupe des automorphismes intérieurs de $\mathrm{SL}_{2,\mathbb{Q}}$ est $\mathrm{PGL}_{2,\mathbb{Q}}$. D'après Hilbert 90, l'application $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}) \to \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q})$ est surjective donc σ est donné par la conjugaison par un élément $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$. Donc $G_X = \{(h, \pm ghg^{-1}), h \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})\}$.

Soit $x = (\tau, h\tau) \in X$. Soit $T = Stab_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}(\tau) \simeq \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. Alors

$$Stab_{G_X^0}(x) = \{(t, gtg^{-1}),\ t \in T\} = \{(t, hth^{-1}),\ t \in T\}.$$

On en déduit que $gTg^{-1} = hTh^{-1}$ donc que $g^{-1}h$ normalise T, mais le normalisateur de T dans $GL_2(\mathbb{R})$ est $T.\mathbb{G}_m(\mathbb{R})$ (où $\mathbb{G}_m(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices diagonales de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$). On en déduit que $h.\tau = g.\tau$ et que

$$X = \{(\tau, g.\tau),\ \tau \in \mathbb{H}\}.$$

En remplaçant g par un multiple ag, on peut supposer par le théorème des diviseurs élémentaires que $g\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{Z}^2$ et que $\mathbb{Z}^2/g.\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ pour un entier m. Cela montre que $C = Y_0(m)$ et cela termine la preuve du théorème.

Remarque 2.14 Edixhoven donne l'exemple suivant qui justifie le passage à $Y_0(l) \times Y_0(l)$ dans la preuve. Il construit des courbes $C \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H} \times$

$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$ tel que $C \subset \mathbf{T}_l C$ qui ne sont pas spéciales. Le problème vient de l'involution d'Atkin w_l qui intervient dans T_l mais pas dans $T_l(l)$. Soit C une courbe telle que une composante C_l de l'image inverse de C dans $Y_0(l) \times Y_0(l)$ soit invariante par $w_l \times w_l$. Alors $C \subset \mathbf{T}_l C$, mais à priori il n'est pas nécessaire que $C_l \subset \mathbf{T}_l C_l$. Soit Z le quotient de $Y_0(l) \times Y_0(l)$ par l'involution $w_l \times w_l$. Le théorème de Bertini donne l'existence de familles continues de courbes dans Z dont l'image inverse dans $Y_0(l) \times Y_0(l)$ sont irréductibles. Comme il n'y a qu'un nombre dénombrable de sous-variétés spéciales dans $Y_0(l) \times Y_0(l)$ on peut choisir une courbe dans Z dont l'image inverse C' dans $Y_0(l) \times Y_0(l)$ est irréductible (et bien sur invariante par $w_l \times w_l$.) On prend alors pour C son image dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H} \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$. En terme de théorie des groupes, comme w_l normalise $\Gamma_0(l)$, le groupe engendré par w_l et l'image de Γ_X peut être discret.

Il est aussi notable que le passage à $Y_0(N)$ qui correspond à un passage à un niveau Iwahori pour une variété de Shimura générale (où la structure de l'algèbre de Hecke est plus simple) joue un rôle important dans les arguments de Klingler et Yafaev [31] pour la fin de la preuve de la conjecture d'André-Oort sous l'hypothèse de Riemann généralisée.

2.2 La conjecture d'André-0ort pour des produits de courbes modulaires.

2.2.1 Préliminaires, notations.

Definition 2.15 *Soit I un ensemble fini de cardinal r. Pour tout $i \in I$, soit Γ_i un sous-groupe de congruence de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. On note $X_{\Gamma_i} = \Gamma_i\backslash\mathbb{H}$ et*

$$S = \prod_{i \in I} X_{\Gamma_i}.$$

Une sous-variété fermée irréductible Z de S est dite spéciale de type $\Omega = \Omega_Z$ pour une partition $\Omega_Z = (I_1, \ldots, I_t)$ de I tel que Z est un produit de sous-variétés Z_i de $S_i = \prod_{j \in I_i} \Gamma_j\backslash\mathbb{H}$ d'une des formes suivantes :

1. Le cardinal de I_i est 1 et Z_i est un point CM de la composante correspondante.

2. Il existe des pour tout $j \in I_i$ des éléments $s_j \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ de déterminant positif tel que Z_i est l'image de l'application

$$\mathbb{H} \to S_i, \quad \tau \mapsto (\Gamma_j s_j \tau)_{j \in I_i}.$$

Etant donné une sous-variété spéciale de type Ω, on note $c(\Omega)$ le nombre de facteurs CM. Une sous-variété Z est dite fortement spéciale si $c(\Omega) = 0$.

On peut vérifier que cette définition de variétés spéciales et de variétés fortement spéciales coincide avec les définitions usuelles en termes de sous-données de Shimura données plus loin dans ce texte ([24] ch. 2).

Le but de cette section est de montrer, sous l'hypothèse de Riemann généralisée pour les corps quadratiques imaginaires, la conjecture d'André-Oort pour $S = \prod_{i\in I} X_{\Gamma_i}$. Il est facile de voir que la conjecture d'André-Oort n'est pas sensible au niveau et que l'on peut supposer sans perte de généralités dans la suite que $S = (\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H})^r$.

Il y a les étapes suivantes que l'on retrouve dans [61] et [31] pour une variété de Shimura arbitraire.

1. Minorations de la taille des orbites sous Galois des sous-variétés spéciales.
2. Equidistribution des sous-variétés fortement spéciales.
3. Alternative Galois/ergodique.
4. Caractérisation des sous-variétés spéciales.
5. Technique géométriques et galoisiennes.

2.2.2 Minorations d'orbites sous Galois.

Pour un point CM x de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$, on note O_x l'anneau de multiplication complexe de x. C'est un ordre dans un corps quadratique imaginaire. On note d_x la valeur absolue du discriminant de O_x. Soit Z une sous-variété spéciale de S de type Ω avec $s = c(\Omega)$. Soit $\{x_1, \dots, x_s\}$ l'ensemble des points CM qui sont des facteurs de Z. Le paramètre fondamental de toute la discussion sera

$$d_Z := \max_{i=1}^{s} d_{x_i}. \tag{4}$$

Proposition 2.16 *Soit $\epsilon > 0$, soit Z une sous-variété spéciale de S de type Ω avec $c(\Omega) > 0$. Alors*

$$|\{\sigma(Z),\ \sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})\}| \gg d_Z^{\frac{1}{2}-\epsilon}. \tag{5}$$

Preuve. Le cardinal de cet ensemble est au moins celui de l'orbite sous Galois des facteurs CM de Z. Le résultat est alors une conséquence du théorème de Brauer-Siegel (c.f. thm. 2.2).

2.2.3 Equidistribution des sous-variétés spéciales.

Soit Z une sous-variété spéciale de S. Alors Z est isomorphe à un produit de courbes modulaires donc est muni d'une mesure de probabilité canonique μ_Z de support Z. On note en particulier μ_S la mesure canonique sur S. Soit $\mathcal{P}(S)$ l'ensemble des mesures de probabilité sur S. Une suite de mesures $\mu_n \in \mathcal{P}$ converge faiblement vers $\mu \in \mathcal{P}$ si pour toute fonction continue bornée f sur S

$$\int_S f\mu_n \to \int_S f\mu.$$

Le résultat suivant est un cas particulier d'un théorème général qui sera discuté dans la dernière section de ces notes.

Théorème 2.17 *Soit S un produit de courbes modulaires et Z_n une suite de sous-variétés fortement spéciales de S. Il existe une sous-suite Z_{n_k} et une sous-variété fortement spéciale Z telles que $\mu_{Z_{n_k}}$ converge faiblement vers μ_Z et $Z_{n_k} \subset Z$ pour tout k.*

Il sera pratique d'utiliser la définition suivante.

Definition 2.18 *Soit M une variété algébrique et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de sous-variétés de M . On dit que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est* **générique** *dans M si pour toute sous-variété N de M avec $N \neq M$, l'ensemble*

$$\{n \in \mathbb{N}, Y_n \subset N\}$$

est de cardinal fini.

Le résultat suivant est un corollaire du théorème 2.17.

Corollaire 2.19 *Soit S un produit de courbes modulaires et Z_n une suite générique de sous-variétés fortement spéciales de S. Alors μ_{Z_n} converge faiblement vers μ_S.*

Nous introduirons aussi pour une variété de Shimura générale la notion de sous-variétés T-spéciales. Dans notre situation, on fixe un sous-ensemble J de I et pour tout $i \in J$ on fixe un anneau de multiplication complexe $O_i = \mathbb{Z} + f_i O_{K_i}$ dans un corps quadratique imaginaire K_i. On peut classiquement associer un sous-tore T de $\mathrm{PGL}_{2,\mathbb{Q}}^{|J|} \subset \mathrm{PGL}_{2,\mathbb{Q}}^{|I|}$ à ces données. Une sous-variété T-spéciale est une sous-variété spéciale dont les facteurs CM sont indexés par les $i \in J$ et les points CM correspondants ont multiplication complexe par O_i. Pour $J = \emptyset$, $T_{\mathbb{Q}} = \{\mathbf{1}\}$ une variété T-spéciale n'est rien d'autre qu'une variété fortement spéciale.

Il est facile alors de remplacer fortement spéciale par T-spéciale dans l'énoncé précédent. Par ailleurs l'alternative Galois/Ergodique est aussi très simple dans ce cas :

Proposition 2.20 *Soit Z_n une suite de sous-variétés spéciales de S. En passant au besoin à une sous-suite soit*

$$|\{\sigma(Z_n),\ \sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})\}| \to \infty$$

Soit il existe un tore $T_{\mathbb{Q}}$ tel que Z_n soit une suite sous-variétés T-spéciales et μ_{Z_n} converge faiblement vers la mesure de probabilité μ_Z canoniquement associée à une variété T-spéciale Z telle que $Z_n \subset Z$.

2.2.4 Un critère d'irréductibilité.

On se donne dans cette partie une sous-variété X de $S := (\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H})^r = \mathbb{C}^r$ contenant une sous-variété spéciale Z avec $c(\Omega_Z) > 0$. On veut montrer que si X est contenu dans un translaté $T_\alpha.X$ de X par un opérateur de Hecke bien choisi, alors X contient une sous-variété spéciale Z' contenant strictement Z.

Nous aurons besoin de quelques proriétés sur les degrés des sous-variétés de $\overline{S} := (\mathbb{P}^1)^r$. Le groupe de Chow de $(\mathbb{P}^1)^r$ est $\mathbb{Z}[\epsilon_1, \ldots, \epsilon_r]$ avec $\epsilon_i^2 = 0$ pour tout i. Soit V une sous-variété de $(\mathbb{P}^1)^r$ pure de codimension i. La classe $[V]$de V dans le groupe de Chow $CH^i((\mathbb{P}^1)^r)$ est

$$[V] = \sum_{|I|=i} a_I \epsilon_I$$

où I parcourt les sous-ensembles de $\{1, \ldots, r\}$ à i éléments. Pour un tel I on note $I^\vee$ le complémentaire de I dans $\{1, \ldots, r\}$. Alors $\epsilon_I = \prod_{i \in I} \epsilon_i$ (y penser comme un produit extérieur) et a_I désigne le degré de la projection de V sur le produit $(\mathbb{P}^1)^{r-i}$ des composantes indéxées par $I^\vee$. On définit le degré de V par

$$\deg(V) = \sum_I a_I.$$

Pour une sous-variété V de $S = (\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H})^r$, on définit le degré de V comme le degré de sa fermeture de Zariski dans $(\mathbb{P}^1)^r$. Si $S' := \prod_{j=1}^r \Gamma_j\backslash\mathbb{H}$

est un produit de courbes modulaires (avec Γ_i sous-groupe d'indice fini de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ pour tout j) et V sous-variété de S', on définit le degré de V par

$$\deg(V) = [\mathbb{C}(V') : \mathbb{C}(V)] \deg(V')$$

où V' désigne l'image de V dans S et $\mathbb{C}(V)$ et $\mathbb{C}(V')$ sont les corps de fonctions de V et V'. Notons que le degré $[\mathbb{C}(V') : \mathbb{C}(V)]$ est borné par $\prod[\Gamma_i : \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})]$.

Proposition 2.21 *(Edixhoven [24] prop. 4.2).*
Soit $r \geq 3$ un entier. Soit X une hypersurface de S telle que pour tout $I \subset \{1, \ldots, r\}$ de cardinal $r-1$, la projection $p_I : X \to (\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H})^{r-1}$ sur les facteurs indéxés par I est dominante. Soit $s \leq r$ un entier et T_{α_l} la correspondance de Hecke définie par

$$\alpha_l = \begin{pmatrix} l^\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^s \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{r-s} \in (\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+)^r,$$

pour un nombre premier l et un entier $\theta \geq 1$. Si $l > \max(\deg(X), 3)$, alors $T_{\alpha_l}.X$ est irréductible.

Preuve. On note $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/l^\theta\mathbb{Z})/\{\pm\}$ et $Y = Y(l^\theta)$ la courbe modulaire associée à ce quotient. Donc $Y(l^\theta)$ est un espace de modules pour les courbes elliptiques munies d'une structure symplectique sur l'ensemble des points de l^θ-torsion. Le groupe G agit librement sur $Y(l^\theta)$ et

$$G\backslash Y(l^\theta) \simeq Y(1) \simeq \mathbb{C}.$$

De même G^r agit librement sur $Y(l^\theta)^r$ avec quotient $\mathbb{C}^r$. On note

$$\pi_r : Y(l^\theta)^r \to \mathbb{C}^r$$

le morphisme associé. Comme $T_{\alpha_l}X$ est une image de π_r^{-1} par un morphisme fini, on voit qu'il suffit de montrer que $\pi_r^{-1}X$ est irréductible.

On note V une composante de $\pi_r^{-1}X$ et $H = \mathrm{Stab}_{G^r}(V)$. Le groupe G^r agit transitivement sur l'ensemble des composantes irréductibles de $\pi_r^{-1}X$. Il suffit donc de voir que $H = G^r$. On va en fait montrer que les projections de H sur les facteurs G^{r-1} sont toutes surjectives. Par symétrie, il suffit de voir que la projection $p_{r-1} : H \to G^{r-1}$ sur les $r-1$ premiers facteurs est surjective.

On considère tout d'abord le produit fibré

$$\begin{array}{ccc} P = X \times_{\mathbb{C}^{r-1}} Y(l^\theta)^{r-1} & \to & Y(l^\theta)^{r-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \stackrel{p_{r-1}}{\to} & \mathbb{C}^{r-1} \end{array}$$

de sorte que $X \simeq P/G^{r-1}$ et $\mathbb{C}^{r-1} = Y(l^\theta)/G^{r-1}$.

Soit $d = \max_I d_I$, P a au plus d composantes car le morphisme $P \to Y(l^\theta)^{r-1}$ est génériquement fini de degré au plus d. On a par ailleurs une action de G^{r-1} sur l'ensemble $Irr(P)$ des composantes irréductibles de P. Le fixateur dans G^{r-1} d'une composante irréductible de P est donc un sous-groupe de G^{r-1} d'indice au plus d.

Lemme 2.22 *Le groupe G^r n'a pas de sous-groupes propres d'indice au plus d.*

Preuve. Cela résulte du fait que G et donc G^r sont engendré par ses l-Sylow. Un sous-groupe d'indice au plus $d < l$ de G^r contient tous les l-Sylow et donc est égal à G^r.

On en déduit que P est irréductible. On a par ailleurs un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} V & \to & \pi_r^{-1}X & \to & Y(l^\theta)^r \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \alpha(V) = V' & \to & P & \to & Y(l^\theta)^{r-1} \end{array}.$$

Vu l'irréductibilité de P, on a $\alpha(V) = V' = P$. On en déduit que

$$\mathrm{Stab}_{G^{r-1}}(V') = p_{r-1}(H) = \mathrm{Stab}_{G^{r-1}}(P) = G^{r-1}.$$

Lemme 2.23 *Soit H un sous-groupe de G^n avec $n \geq 2$. On suppose que pour tout sous-ensemble I de $\{1, \ldots, n\}$ de cardinal 2 la projection $p_I(H) = G^2$. Alors $H = G^n$.*

Preuve. On peut supposer que $n \geq 3$, on a $H \subset G \times G^{n-1}$ et on note $p_1 : G^n \to G$ et $p_2 : G^n \to G^{n-1}$ les projections sur les facteurs. On peut supposer (en faisant une récurrence sur n- ou en ne s'intéressant qu'au H du problème que l'on regarde) que les deux projections de H par p_1 et p_2 sont surjectives. On note

$$H_1 := H \cap G^{n-1} = \mathrm{Ker}(p_{1|H}) \lhd G^{n-1}$$

et

$$H_2 := H \cap G = \mathrm{Ker}(p_{2|H}) \lhd G.$$

Le lemme de Goursat affirme alors qu'il existe un isomorphisme

$$\phi : G^{n-1}/H_1 \to G/H_2$$

tel que si on note $\pi : G^n \to G^{n-1}/H_1 \times G/H_2$ et

$$Gr(\phi) := \{(x, \phi(x)), x \in G^{n-1}/H_1\}$$

son graphe, alors

$$H = \pi^{-1}Gr(\phi).$$

Si $H_2 = G$, alors $H = G^{n-1}$. Si $H_2 = \{1\}$ alors $H_1 \neq G^{n-1}$. Notant G_j le j-ième facteur de G^n, il existe $j \geq 2$ tel que $H_1 \cap G_j \neq \{G_j\}$. Alors

$$p_{1,2} : H \to G_1 \times G_j$$

n'est pas surjectif.

2.2.5 Caractérisation des sous-variétés spéciales.

Dans cette partie on note encore $S := (\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H})^r = \mathbb{C}^r$. Pour tout sous ensemble $I \in \{1, \ldots, r\}$, on note $\mathbb{C}^I$ le produit des facteurs indexés par I et $p_I : S \to \mathbb{C}^I$ la projection correspondante. Soit V une sous-variété irréductible de S. Un sous-ensemble I de S est dit minimal pour V si $p_I V$ est une hypersurface de $\mathbb{C}^I$ et pour tout $I' \subset I$ de cardinal $|I'| = |I| - 1$ la restriction de $p_{I'}$ à V est dominante. On dit aussi dans cette situation que p_I est une projection minimale. Une conséquence simple de la définition des sous-variétés spéciales est donnée par le lemme suivant du à Edixhoven ([24] Prop 3.6).

Lemme 2.24 *Une sous variété V de S est spéciale si et seulement si les ensembles minimaux I de V sont de cardinal $|I| \leq 2$ et si pour toute projection minimale $p_I(V)$ est spéciale dans $\mathbb{C}^I$.*

Nous utiliserons aussi le lemme suivant ([24] lemma 3.5).

Lemme 2.25 *Soit X une sous-variété de S, alors X est une union de composantes irréductibles de $\cap_I p_I^{-1} p_I X$, la réunion portant sur les sous-ensembles minimaux I pour X.*

Le but de cette partie est de donner la caractérisation suivante des sous-variétés spéciales contenues dans une sous-variété en terme d'opérateurs de Hecke.

Proposition 2.26 *Soit X une sous-variété de S dont les composantes irréductibles ont toutes les mêmes ensembles minimaux. On suppose que toute composante irréductible X_i de X contient une sous-variété spéciale Z_i avec $s := c(\Omega_{Z_i})$ indépendant de i telle que la projection de Z_i sur les s premiers facteurs est un point CM. On suppose aussi que la première projection de X est dominante. Soit $l \geq \max(\deg(X), 13)$ un nombre premier tel que $X \subset \mathbf{T}_l X$. Alors X est un produit $X = \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$ pour des variétés $\mathcal{X}_1$ et $\mathcal{X}_2$ de $\mathbb{C}^s$ et de $\mathbb{C}^{r-s}$ respectivement. De plus les composantes irréductibles de $\mathcal{X}_1$ sont spéciales. En particulier, chaque composante irréductible X_i contient une sous-variété spéciale Z_i' contenant Z_i telle que $c(\Omega_{Z_i'}) < c(\Omega_{Z_i}) = s$.*

On commence par le lemme suivant.

Lemme 2.27 *Soit I un sous-ensemble de $\{1, \ldots, n\}$ minimal pour les composantes irréductibles de X. Soit I est contenu dans $\{1, \ldots, s\}$, soit I est contenu dans $\{s+1, \ldots, r\}$. Si $|I| \geq 3$, alors $I \subset \{s+1, \ldots, r\}$.*

Preuve. Notons $I_1 = I \cap \{1, \ldots, s\}$ et $I_2 = I \cap \{s+1, \ldots, r\}$.

Supposons tout d'abord $|I| \geq 3$ Comme I est minimal, les composantes irréductibles de $p_I X$ et de $\mathbf{T}_l X$ sont des hypersurfaces de $\mathbb{C}^I$. Notons $T_{l,I}$ la correspondance de Hecke sur $\mathbb{C}^I$ qui est le produit des T_l sur les facteurs indexés par I_1 et qui est triviale sur les facteurs indexés par I_2. Alors $p_I \mathbf{T}_l X = T_{l,I} p_I X$. Comme $\deg(p_I(X)) \leq \deg(X)$, la proposition 2.21 assure que $p_I X$ et $T_{l,I} p_I X$ ont le même nombre de composantes irréductibles. L'inclusion $X \subset \mathbf{T}_l X$ assure alors que $p_I X = T_{l,I} p_I X$. Pour $i \in \{1, 2\}$ fixons $x_i \in p_{I_i} X$. Alors $p_I X$ contient l'orbite sous $T_{l,I}$ de (x_1, x_2). Comme les orbites sous T_l d'un point arbitraire de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$ sont denses pour la topologie complexe (elles sont même équiditribuées pour la mesure de Poincaré normalisée), on voit que $p_I.X$ contient $\mathbb{C}^{I_1} \times \{x_2\}$. Les composantes de $p_I X$ sont donc de la forme $\mathbb{C}^{I_1} \times p_{I_2} X_i$ pour une composante irréductible X_i de X. Ceci contredit la minimalité de I si $I_1 \neq \emptyset$.

Si $|I| = 2$ et que $I_1 \neq \emptyset$ et $I_2 \neq \emptyset$. Soit X_i une composante de X et $Z_i \subset X_i$ la sous-variété spéciale donnée par l'hypothèse. Alors $p_I Z_i$ est de la forme $\{x_i\} \times \mathbb{C} \subset \mathbb{C}^2$ pour un point CM x_i de $\mathbb{C} = \mathrm{SL}_2\backslash\mathbb{H}$. On en déduit que $p_I X_i = \{x\} \times \mathbb{C}$, ce qui contredit la minimalité de I.

Si $|I| = 1$ alors $p_I X$ est un point CM et $I \subset \{2, \ldots, s\}$.

Preuve de la proposition 2.26. D'après le lemme 2.25, X est une union de composantes irréductibles de

$$\cap_I p_I^{-1} p_I X.$$

l'intersection portant sur les ensembles minimaux de X. L'intersection des $p_I^{-1} p_I X$ pour les I minimaux contenus dans $\{1, \ldots, s\}$ est de la forme $\mathcal{X}_1' \times \mathbb{C}^{r-s}$. Celle portant sur les $I \subset \{s+1, \ldots, r\}$ est de la forme $\mathbb{C}^r \times \mathcal{X}_2'$. Donc X est de la forme $X = \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$ pour des unions $\mathcal{X}_i$ de composantes irréductibles de $\mathcal{X}_i'$.

Fixons une composante $X_i = Y_1 \times Y_2$ de X. Soit I un ensemble minimal pour Y_1, alors $|I| \leq 2$ et si $|I| = 1$, $p_I Y_1$ est un point spécial. Si $|I| = 2$, le cas $r = 2$ de la conjecture assure que $p_I Y_1$ est aussi une sous-variété spéciale. Le lemme 2.24 nous assure alors que Y_1 est spéciale. La sous-variété spéciale Z_i de X_i est de la forme

$$Z_i = \{x_1\} \times \ldots \times \{x_s\} \times \mathcal{Z}_i$$

pour une sous-variété spéciale $\mathcal{Z}_i$ de $\mathbb{C}^{r-s}$. La sous-variété spéciale $Z_i' = Y_1 \times \mathcal{Z}_i$ répond alors à la question. L'inégalité $c(\Omega_{Z_i'}) < c(\Omega_{Z_i})$ est assuré par le fait que la projection de Z_i' sur le premier facteur est dominante.

2.2.6 Techniques géométriques et Galoisiennes.

Théorème 2.28 *On admet l'hypothèse de Riemann pour les corps quadratiques imaginaires. Soit X une sous-variété de S contenant un ensemble Zariski dense Σ de sous-variétés spéciales. Alors les composantes irréductibles de X sont spéciales.*

On peut supposer que les sous-variétés de Σ sont toutes du même type Ω. Comme X contient un ensemble Zariski dense de points spéciaux (donc définis sur $\overline{\mathbb{Q}}$) X est défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$. En remplaçant X par l'union de ses conjugués sous $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ on peut supposer que X est défini sur $\mathbb{Q}$. On peut aussi supposer que X est irréductible sur $\mathbb{Q}$. On peut aussi supposer que les projections de X sur les facteurs de S sont dominantes.

On peut extraire de Σ une suite générique de sous-variétés de S (au sens de la définition 2.18) par le procédé diagonal classique suivant. L'ensemble des sous-variétés Y de S définies sur $\overline{\mathbb{Q}}$ avec $Y \neq S$ est dénombrable. Soit

$(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une indexation de l'ensemble des sous-variétés Y de S définies sur $\overline{\mathbb{Q}}$ avec $Y \neq S$. Comme Σ est Zariski dense dans S, pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $Z_n \in \Sigma$ tel que Z_n n'est pas contenu dans $\cup_{i=1}^n Y_i$. Comme les Z_n sont définis sur $\overline{\mathbb{Q}}$ la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est générique dans S.

Si $c(\Omega) = 0$, le théorème 2.17 et notre hypothèse assurent qu'il existe une suite Z_n de sous-variété spéciales de X générique dans X telle que la suite de mesures associées μ_{Z_n} converge faiblement vers la mesure μ_Z associée à une sous-variété spéciale Z. Comme pour tout n le support Z_n de μ_{Z_n} est contenu dans X qui est fermé, on voit que $Z \subset X$. De plus $Z_n \subset Z$ pour $n \gg 0$, donc Z contient un ensemble Zariski dense dans X. Finalement $X = Z$ est une sous-variété spéciale.

On suppose donc que $s := c(\Omega) > 0$. En changeant au besoin l'ordre des facteurs, on peut supposer que les sous-variétés Z dans Σ s'écrivent sous la forme

$$Z = \{x_1\} \times \ldots \times \{x_s\} \times Z'$$

avec Z' fortement spéciale dans $\mathbb{C}^{r-s}$. On rappelle que si $x \in \mathbb{C} = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$ est un point CM, on note O_x son anneau de multiplication complexe et d_x le discriminant de O_x. On peut aussi supposer que $d_Z := \max(d_{x_i}) = d_{x_1}$.

Au vu de la discussion précédente le théorème est conséquence de la proposition suivante :

Proposition 2.29 *On suppose que $c(\Omega) > 0$. Alors X contient un ensemble Zariski dense de sous-variétés spéciales de type Ω' avec $c(\Omega') < c(\Omega)$.*

Le théorème de Chebotarev effectif a pour conséquence le lemme suivant :

Lemme 2.30 *On admet l'hypothèse de Riemann généralisée pour les corps quadratiques imaginaires. Pour d_Z suffisamment grand , il existe un premier l décomposé dans chaque O_{x_i} tel que*

$$\deg(X) \ll l \ll (\log d_Z)^3.$$

Comme la première projection de X est dominante, l'ensemble des $p_1 Z$ pour Z dans Σ est dense dans $\mathbb{C}$. La proposition 2.16 assure alors que d_Z n'est pas borné quand Z varie dans Σ. Le lemme assure donc l'existence pour d_Z assez grand d'un l décomposé dans tout les O_{x_i} tel que

$$\max(3, \deg(X)) < l \ll (\log d_Z)^3.$$

Si X est contenu dans $\mathbf{T_l}X$, la proposition 2.26 nous assure que X contient bien une sous-variété spéciale Z' contenant Z telle que $c(\Omega') < c(\Omega)$.

On suppose donc qu'il existe une composante géométriquement irréductible X' de X qui n'est pas contenu dans $\mathbf{T_l}.X$. Comme nous avons supposé que X est irréductible sur $\mathbb{Q}$ et comme $\mathbf{T_l}$ est défini sur $\mathbb{Q}$, l'intersection de X avec $\mathbf{T_l}X$ est propre.

Lemme 2.31 *On suppose que X n'est pas contenu dans $\mathbf{T_l}X$. Il existe une hypersurface H de $(\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}})^r$ tel que*

1. *X n'est pas contenu dans H et $\mathbf{T_l}X \subset H$.*
2. $\deg(H) \ll l^{2s}$.

Preuve. On note $\overline{V}$ la fermeture dans $(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}})^r$ d'une sous-variété V de S. Ecrivons la décomposition

$$[\overline{X}] = \sum_{|I|=r-\dim(X)} a_I \epsilon_I$$

de $[\overline{X}]$ dans $CH^{r-\dim(X)}((\mathbb{P}^1)^r)$. Alors

$$[\overline{\mathbf{T_l}X}] = (l+1)^s \sum_{|I|=r-\dim(X)} a_I \epsilon_I.$$

On peut choisir une hypersurface H telle que

$$[H] = (\dim(X)!(l+1)^s \sum_{|I|=r-\dim(X)} a_I \sum_{i=1}^{r} \epsilon_i.$$

Comme l est décomposé dans chaque O_{x_i} et comme Z' est géométriquement irréductible sur $\mathbb{Q}$, un conjugué par Galois de Z est contenu dans $\mathbf{T_l}X$. Comme cette intersection est rationnelle sur $\mathbb{Q}$, $Z \subset X \cap H$.

Lemme 2.32 *Soit Y une $\mathbb{Q}$-composante de $X \cap H$ contenant Z. Si d_Z est suffisament grand, la projection de Y sur le premier facteur est dominante.*

Preuve. Supposons que la première projection de Y ne soit pas dominante. Une composante géométriquement irréductible de Y est de la forme $\{x_1\} \times Y'$. L'image de la première projection de Y contient l'orbite sous-Galois $O(x_1)$ de

x_1, donc $[\overline{Y}]$ est divisible par $|O(x_1)|\epsilon_1$. On sait par ailleurs d'après le lemme 2.16 que pour tout $\epsilon > 0$,

$$|O(x_1| \gg d_Z^{\frac{1}{2}+-\epsilon},$$

donc $\deg(Y) \gg d_Z^{\frac{1}{2}+-\epsilon}$. Les choix de$H$, l et le théorème de Bezout nous assurent que

$$\deg(Y) \ll l^{2s} \ll (\log d_Z)^{6s}.$$

Pour $d_Z \gg 0$ ces deux inégalités sont incompatibles.

On remplace $X = X_1$ par une composante $Y = X_2$ de $X \cap H$ contenant Z et on procède par récurrence. Noter que seule l'hypothèse de surjectivité de Y sur le premier facteur compte pour notre preuve.

Pour construire X_{i+1} à partir de X_i, on choisit un nombre premier l_i totalement décomposé dans les O_{x_k} avec $l_1 = l$, et l_i tel que $\deg(X_i) < l_i < A\deg(X_i)$. L'existence d'un tel l_i est assuré par la discussion sur Chebotarev effectif après la propositon 2.6.

Si l'intersection de X_i avec $T_{\mathbf{l_i}}X_i$ est propre on construit X_{i+1} comme une composante de l'intersection $X_i \cap H_i$ contenant Z pour une hypersurface H_i de degé $\simeq \deg(\mathbf{T_l}X_i)$ conteant $\mathbf{T_l}X_i$ mais ne contenant pas X_i. Si cette intersection n'est pas propre on appplique la proposition 2.26 pour conclure à l'existence de Z' contenant Z dans X tel que $c(\Omega_{Z'}) < c(\Omega)$.

Notons aussi qu'il existe une constante universelle C telle que

$$\deg(X_i) \ll (\log d_Z)^C$$

de sorte que l'on peut appliquer la méthode du lemme précédent pour voir qu'a chaque cran la première projection de X_i est dominante.

Au bout d'un nombre fini d'étapes on se trouve dans la situation suivante :

1. $\dim(X_k) = \dim(Z) + 1$.
2. $\deg(X_k) \ll (\log d_Z)^C$.
3. $|\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}).Z| \gg_\epsilon d_Z^{\frac{1}{2}-\epsilon}$.

Ces inégalités montrent que l'intersection $X_k \cap T_{\mathbf{l_k}}X_k$ n'est pas propre et donc que $X_k \subset T_{\mathbf{l_k}}X_k$. On conclut encore à l'aide de la proposition 2.26 l'existence de Z_1 contenant Z dans X tel que $c(\Omega_{Z_1}) < c(\Omega)$.

3 Variétés de Shimura.

Le but de cette partie est de présenter les objets de la théorie des variétés de Shimura qui sont au centre de la conjecture d'André–Oort.

3.1 Structures de Hodges et groupes de Mumford-Tate.

3.1.1 Tores algébriques.

On note $\mathbb{G}_m$ le groupe multiplicatif, de sorte que pour tout anneau A, $\mathbb{G}_m(A) = A^\times$. Soit k un corps et k_s une clôture séparable de k. Soit T un tore sur k, on a donc par définition

$$T_{k_s} = \mathbb{G}^r_{m,k_s}$$

pour un entier r.

On définit le groupe des caractères $X^*(T)$ et le groupe des cocaractères $X_*(T)$:

$$X^*(T) = \mathrm{Hom}(T_{k_s}, \mathbb{G}_{m,k_s}),$$
$$X_*(T) = \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_{m,k_s}, T_{k_s}).$$

On dispose d'une action continue de $\mathrm{Gal}(k_s/k)$ sur $X^*(T)$ et $X_*(T)$ et le foncteur $X_*(.)$ (resp. $X^*(.)$) de la catégorie des tores algébriques sur k dans la catégorie des groupes abéliens libres de rang fini munis d'une action continue de $\mathrm{Gal}(k_s/k)$ est une équivalence de catégories (resp. une anti-équivalence de catégories).

On dispose d'un accouplement parfait

$$X^*(T) \times X_*(T) \to \mathbb{Z} = \mathrm{End}(\mathbb{G}_{m,k_s}) \tag{6}$$

$$(\chi, \mu) \mapsto < \chi, \mu >= \chi o \mu.$$

Noter que les endomorphismes de $\mathbb{G}_{m,k_s}$ sont de la forme $z \mapsto z^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$ et on a donc par définition

$$\chi o \mu(z) = z^{<\chi,\mu>}.$$

Pour $k = k_s$ et $\rho : T \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation de T dans un espace vectoriel V de dimension finie sur k, on dispose d'une décomposition

$$V = \bigoplus_{\chi \in X^*(T)} V_\chi = \bigoplus_{(n_1,\dots,n_r)\in\mathbb{Z}^r} V^{n_1,\dots,n_r} \tag{7}$$

où on a fait les identifications

$$X^*(\mathbb{G}^r_m) = X^*(T) \longrightarrow \mathbb{Z}^r$$

$$\left[(z_1,\ldots,z_r)\to\prod_{i=1}^{r} z_i^{n_i}\right]\mapsto(n_1,\ldots,n_r)$$

et

$$V_\chi := \{v\in V, \rho(t).v=\chi(t).v\}$$

$$V^{n_1,\ldots,n_r} = \{v\in V, \rho(z_1,\ldots,z_r).v = z_1^{-n_1}\ldots z_r^{-n_r}.v\}.$$

Cette décomposition détermine ρ. Pour un corps général k, il existe une équivalence de catégories entre la catégorie $\mathrm{Rep}_k(T)$ des représentations de T dans un espace vectoriel de dimension finie sur k et la catégorie des espaces vectoriels V de dimension finie sur k munis d'une $X^*(T)$-graduation

$$V\otimes_k k_s = \bigoplus_{\chi\in X^*(T)} V_{k_s,\chi}$$

telle que pour tout $\sigma\in\mathrm{Gal}(k_s/k)$ on ait

$$V_{k_s,\chi}^{\sigma} = V_{k_s,\chi^\sigma}.$$

3.1.2 Structures de Hodge.

On définit le $\mathbb{R}$-tore de Deligne $\mathbb{S}=\mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathbb{G}_m$. Alors $X^*(S)=\mathbb{Z}z\oplus\mathbb{Z}\overline{z}$ munie de l'action évidente de la conjugaison complexe ($z^c=\overline{z}$, $\overline{z}^c=z$). Ceci détermine $\mathbb{S}$ d'après ce qui précède. On a

$$\mathbb{S}(\mathbb{R})=\mathbb{C}^*\subset\mathbb{S}(\mathbb{C})=\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*$$

Definition 3.1 *On définit :*
(a) Le **cocaractère de poids**

$$w:\mathbb{G}_{m,\mathbb{R}}\to\mathbb{S}$$

donné sur les points par l'inclusion naturelle

$$\mathbb{R}^*=\mathbb{G}_m(\mathbb{R})\subset\mathbb{S}(\mathbb{R})=\mathbb{C}^*.$$

(b) Le **cocaractère principal**

$$\mu:\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}\to\mathbb{S}_{\mathbb{C}} \tag{8}$$

$$z\mapsto(z,1).$$

Definition 3.2 *Soit A un sous-anneau de $\mathbb{R}$. (Dans la pratique $A = \mathbb{Z}$, $A = \mathbb{Q}$ ou $A = \mathbb{R}$.) Une A-structure de Hodge pure de poids $n \in \mathbb{Z}$ est un A-module libre de rang fini V, muni d'un $\mathbb{R}$-morphisme de groupes algébriques*

$$h : \mathbb{S} \to \mathrm{GL}(V_{\mathbb{R}}), \tag{9}$$

tel que

$$hw : \mathbb{G}_{m,\mathbb{R}} \to \mathrm{GL}(V_{\mathbb{R}})$$

est donné par

$$z \mapsto z^{-n}\mathbf{1}_V.$$

Autrement dit $V_{\mathbb{C}} = \oplus_{p+q=n} V_{\mathbb{C}}^{p,q}$ avec $V_{\mathbb{C}}^{p,q} = \overline{V_{\mathbb{C}}^{q,p}}$ et $(z_1, z_2) \in \mathbb{S}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ agit sur $V_{\mathbb{C}}^{p,q}$ par multiplication par $z_1^{-p} z_2^{-q}$ (donc $z \in S(\mathbb{R}) = \mathbb{C}^*$ agit sur $V_{\mathbb{C}}^{p,q}$ par multiplication par $z^{-p}\overline{z}^{-q}$).

Une A-structure de Hodge est une somme directe de A-structures de Hodge pures de poids n_i.

*Le **type** d'une structure de Hodge V est l'ensemble des $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $V_{\mathbb{C}}^{p,q}$ est non nul.*

L'automorphisme $C := h(i)$ de $V_{\mathbb{R}}$ est appelé **Opérateur de Weil**. Si $v^{p,q} \in V_{\mathbb{C}}^{p,q}$, alors

$$C.v^{p,q} = h(i).v^{p,q} = i^{q-p} v^{p,q}.$$

Un homomorphisme de A-structure de Hodge est un morphisme A-linéaire $V_1 \to V_2$ tel que $f_{\mathbb{R}} : V_{1,\mathbb{R}} \to V_{2,\mathbb{R}}$ est $\mathbb{S}$-équivariant (ou tel que pour tout $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$, on a $f_{\mathbb{C}}(V_{1,\mathbb{C}}^{p,q}) \subset V_{2,\mathbb{C}}^{p,q}$). On note $\mathrm{Hom}_{ASH}(V_1, V_2)$ le groupe des morphismes de structures de Hodge de V_1 dans V_2.

Soit n un entier. La A-structure de Hodge de Tate $A(n)$ est défini comme le A-module libre de rang 1

$$A(n) = (2i\pi)^n A \subset \mathbb{C}$$

muni d'une structure de Hodge pure de type $(-n, -n)$. On note $A = A(0)$ la structure de Hodge triviale.

Si V_1 et V_2 est une A-structure de Hodge de poids n_1 et n_2, alors $V_1 \otimes V_2$ est une structure de Hodge de poids $n_1 + n_2$. De même si V est une A-structure de Hodge de poids n alors $V^\vee := \mathrm{Hom}_{ASH}(V, A)$ est une structure de Hodge de poids $-n$. On note $V(n) = V \otimes A(n)$.

Definition 3.3 *Une A-structure de Hodge V de poids n est dite polarisable si il existe un homomorphisme de A-structures de Hodge*

$$\phi : V \otimes V \to A(-n)$$

tel que la forme bilinéaire

$$V_{\mathbb{R}} \times V_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$$

$$(v, w) \mapsto (2i\pi)^n \phi(v \otimes h(i)w)$$

est symétrique et définie positive. Il revient au même de demander que ϕ soit non dégénérée et que ϕ soit alternée si n est pair et symétrique si n est impair.

Example 3.4 *Soit X une variété algébrique projective lisse sur $\mathbb{C}$, alors les groupes de cohomologie de Betti $H^i(X, \mathbb{Z})$ sont des $\mathbb{Z}$-structures de Hodge polarisables. On a*

$$H^i(X, \mathbb{Z})_{\mathbb{C}} = H^i(X, \mathbb{C})$$

et pour $p + q = i$

$$H^i(X, \mathbb{C})^{p,q} = H^q(X, \Omega_X^p).$$

Le cup produit $H^i(X, \mathbb{Z}) \otimes H^j(X, \mathbb{Z}) \to H^{i+j}(X, \mathbb{Z})$ et l'isomorphisme de Kunneth

$$H^k(X \times Y, \mathbb{Q}) = \oplus_{i+j=k} H^i(X, \mathbb{Q}) \otimes H^j(Y, \mathbb{Q})$$

sont des morphismes de structures de Hodge. Le choix d'un plongement X dans $\mathbb{P}^n$ détermine une polarisation sur la partie primitive de la cohomologie et la décomposition de Lefchetz

$$H^i(X, \mathbb{Q}) = \oplus_{j \geq 0} c_1(L)^j H^{i-2j}(X, \mathbb{Q}(-j))$$

donne la polarisation sur $H^i(X, \mathbb{Q})$

Example 3.5 *Le foncteur $X \to H_1(X, \mathbb{Z})$ de la catégorie des variétés abéliennes complexes dans la catégorie des $\mathbb{Z}$-structures de Hodge polarisables de type $(-1, 0), (0, -1)$ est une équivalence de catégories. Un foncteur quasi-inverse est donné de la manière suivante : Soit $V_{\mathbb{Z}}$ une $\mathbb{Z}$-structure de Hodge de type $(-1, 0), (0, -1)$. Pour $v \in V_{\mathbb{R}}$ l'opérateur de Weil*

$$h(i).v = iv$$

détermine une structure complexe sur $V_{\mathbb{R}}$. Dans cette situation $X := V_{\mathbb{R}}/V_{\mathbb{Z}}$ est un tore complexe. Soit $\phi : V_{\mathbb{Z}} \otimes V_{\mathbb{Z}} \to \mathbb{Z}(1)$ une polarisation. Alors ϕ est une forme alternée prenant des valeurs entières sur $V_{\mathbb{Z}}$. La théorie de Riemann permet alors d'associer à un tel ϕ un fibré inversible ample L_ϕ sur X. Donc X est en fait une variété abélienne.

Remarque 3.6 *On voit de la même manière que la catégorie des variétés abéliennes sur $\mathbb{C}$ à isogénie près est équivalente à la catégorie des $\mathbb{Q}$-structures de Hodge polarisables de type $(-1,0),(0,-1)$ et que la catégorie des tores complexes est équivalentes à la catégorie des $\mathbb{Z}$-structures de Hodge de type $(-1,0),(0,-1)$.*

Proposition 3.7 *La catégorie des $\mathbb{Q}$-structures de Hodge polarisables est semi-simple et Tannakienne.*

Preuve. Soit V une $\mathbb{Q}$-structure de Hodge et $\phi : V \otimes V \to \mathbb{Q}(-n)$ une polarisation. Tout tenseur $T = V^{\otimes n} \otimes (V^\vee)^{\otimes m}$ est muni d'une polarisation déduite de ϕ. Si $W \subset V$ est une sous-$\mathbb{Q}$-structure de Hodge, alors

$$\phi_{|W\otimes W} : \ W \otimes W \to \mathbb{Q}(-n)$$

est une polarisation et

$$W^* = \{x \in V,\ \phi(x,w) = 0 \text{ pour tout } w \in W\}$$

est une $\mathbb{Q}$-sous-structure de Hodge polarisée de V telle que $V \simeq W \oplus W^*$ (isomorphisme de $\mathbb{Q}$-structures de Hodge polarisées).

3.1.3 Groupes de Mumford-Tate.

Definition 3.8 *Soit $V_{\mathbb{Q}}$ une $\mathbb{Q}$-structure de Hodge donnée par*

$$h : \ \mathbb{S} \to \mathrm{GL}(V_{\mathbb{R}}).$$

Le groupe de Mumford-Tate $\mathrm{MT}(V)$ (ou $\mathrm{MT}(h)$) de V est le plus petit $\mathbb{Q}$-sous-groupe algébrique M de $\mathrm{GL}(V_{\mathbb{Q}})$ tel que h se factorise par $M_{\mathbb{R}}$. On définit de même le groupe de Hodge $Hg(V)$ de V en utilisant à la place de h,

$$h_{|\mathbb{U}^1} : \ \mathbb{U}^1 \longrightarrow \mathrm{GL}(V_{\mathbb{R}})$$

où $\mathbb{U}^1(\mathbb{R}) = \{z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{S}(\mathbb{R}),\ \ |z| = 1\}$.

Lemme 3.9 *Soit μ le cocaractère principal $\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \to \mathbb{S}_{\mathbb{C}}$ et*

$$\mu_h = h_{\mathbb{C}}\mu : \ \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \to \mathrm{GL}(V_{\mathbb{C}}).$$

Montrer que $MT(V)$ est aussi le plus petit $\mathbb{Q}$-sous-groupe algébrique M de $\mathrm{GL}(V_{\mathbb{Q}})$ tel que μ_h se factorise par $M_{\mathbb{C}}$.

Remarque 3.10 *(a) Les définitions impliquent que $\mathrm{MT}(V)$ et $\mathrm{Hg}(V)$ sont des $\mathbb{Q}$-groupes algébriques linéaires* **connexes**.

(b) Si V est pure de poids $n \neq 0$ alors

$$hw : \ \mathbb{G}_{m,\mathbb{R}} \to \mathrm{GL}(V_{\mathbb{R}})$$

est donné par $z \to z^{-n}\mathbf{1}_V$. On en déduit que $\mathrm{MT}(V)$ contient le centre $\mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}}\mathbf{1}_V$ de $\mathrm{GL}(V_{\mathbb{Q}})$. Si V est pure de poids 0 alors

$$\mathrm{MT}(V) = \mathrm{Hg}(V) \subset \mathrm{SL}(V_{\mathbb{Q}}).$$

(c) On a toujours $\mathrm{Hg}(V) \subset \mathrm{SL}(V)$ et si V est pure de poids non nul alors $\mathrm{MT}(V)$ est le produit presque direct de $\mathrm{Hg}(V)$ et de $\mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}}\mathbf{1}_V$ à l'intérieur de $\mathrm{GL}(V)$.

Le lien entre $\mathbb{Q}$-sous-structures de Hodge et groupes de Mumford-Tate est donné par le résultat fondamental suivant.

Théorème 3.11 *Soit V une $\mathbb{Q}$-structure de Hodge. Soient m, n deux entiers positifs ou nuls. On note $T^{m,n} := V^{\otimes m} \otimes (V^{\vee})^{\otimes m}$. Soit T une $\mathbb{Q}$ structure de Hodge obtenue comme somme directe de $\mathbb{Q}$-structures de Hodge de la forme T^{m_i,n_i}. On dispose alors d'une action induite de $\mathrm{MT}(V)$ sur V. Soit $W \subset T$ un $\mathbb{Q}$-sous-espace vectoriel, alors W est une $\mathbb{Q}$-sous-structure de Hodge si et seulement si W est un $\mathrm{MT}(V)$-sous-module.*

3.1.4 Variations de structures de Hodge.

Nous donnons ici des définitions de base de la théorie des variations de structure de Hodge. Le lecteur peut consulter entre autres [64] 17.3.1 ou [4] pour plus de détails et pour certaines preuves.

Soit S une variété complexe, on rappelle qu'une variation de $\mathbb{Q}$-structures de Hodge de poids n sur S est la donnée d'un triplet

$$\mathcal{V} = (\mathcal{V}_{\mathbb{Q}}, \mathcal{F}^{\cdot}, \mathcal{Q}),$$

où $\mathcal{V}_{\mathbb{Q}}$ est un système local de $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels de dimension finie sur S, $\mathcal{F}^{\cdot}$ est une filtration de $\mathcal{V}_{\mathcal{O}} := \mathcal{V}_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{O}_S$ par des sous-fibrés holomorphes définissant en tout $s \in S$ une $\mathbb{Q}$-structure de Hodge $\mathcal{V}_s$ de poids n ;

$$\mathcal{Q} : \mathcal{V}_{\mathbb{Q}} \times \mathcal{V}_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Q}(-n)_S$$

est une forme bilinéaire localement constante non dégénérée qui induit en tout $s \in S$ une polarisation de la structure de Hodge $\mathcal{V}_s$.

Soit ∇ la connexion de Gauss-Manin. On demande de plus que la condition de transversalité de Griffiths

$$\nabla \mathcal{F}^p \subset \Omega^1_S \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{F}^{p-1}$$

soit vérifiée.

Soit $\pi : \tilde{S} \to S$ le revêtement universel de S. Soit $s \in S$ et $\tilde{s} \in \tilde{S}$ tels que $\pi(\tilde{s}) = s$.

On fixe une trivialisation

$$\pi^* \mathcal{V}_{\mathbb{Q}} \simeq \tilde{S} \times V_{\mathbb{Q}} \tag{10}$$

et on note

$$\rho : \pi_1(S, s) \to \mathrm{GL}(V_{\mathbb{Q}})$$

la représentation de monodromie correspondante au système local $\mathcal{V}_{\mathbb{Q}}$.

Definition 3.12 *Le groupe de monodromie algébrique est le plus petit $\mathbb{Q}$-sous-groupe algébrique de $\mathrm{GL}(V_{\mathbb{Q}})$ contenant l'image de ρ. On note $H_{mon,s}$ la composante connexe de l'identité du groupe de monodromie algébrique. Notons que le groupe de monodromie algébrique est indépendant des choix de s et $\tilde{s}$ une fois que l'on a fixé la trivialisation (10).*

Notons par ailleurs pour tout $s \in S$, $\mathrm{MT}_s = \mathrm{MT}(\mathcal{V}_s) \subset \mathrm{GL}(\mathcal{V}_s)$ le groupe de Mumford-Tate de $\mathcal{V}_s$. Le choix de $\tilde{s}$ au dessus de s donne un isomorphisme $\mathcal{V}_s \simeq V$, d'où un plongement

$$i_{\tilde{s}} : \mathrm{MT}_s \to \mathrm{GL}(V).$$

Il existe une union dénombrable Σ de sous-espaces analytiques propres de S telle que pour tout $s \in S \backslash \Sigma$ l'image M de $i_{\tilde{s}}$ dans $\mathrm{GL}(V)$ est indépendante des choix de s et $\tilde{s}$. Pour $s \in \Sigma$ l'image de $i_{\tilde{s}}$ est un sous-groupe propre de M.

Definition 3.13 *Un point de $S\backslash\Sigma$ est appeé* **Hodge générique** *et $S\backslash\Sigma$ est le* **lieu Hodge générique**. *Le groupe M est appelé groupe de Mumford-Tate générique de la variation de structure de Hodge.*

Le lien entre groupe de monodromie algébrique et groupe de Mumford-Tate générique est donné par le résultat suivant.

Théorème 3.14 *(a) Le groupe $H_{mon,s}$ est un sous-groupe normal du groupe dérivé M^{der}.*

(b) Si il existe $t \in S$ tel que MT_t est un tore, alors

$$H_{mon,s} = M^{der}. \tag{11}$$

Le premier résultat est dû à Deligne[19], le second à André [2].

3.2 Variétés de Shimura.

3.2.1 Espaces symétriques hermitiens.

Soit $G_{\mathbb{Q}}$ un $\mathbb{Q}$-groupe algébrique réductif et

$$h : \mathbb{S} \to G_{\mathbb{R}}$$

un morphisme de groupes algébriques. Toute représentation

$$\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}(V_{\mathbb{Q}})$$

dans un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension finie détermine une $\mathbb{Q}$-structure de Hodge $(V_{\mathbb{Q}}, \rho h)$ sur $V_{\mathbb{Q}}$. Pour tout $g \in G(\mathbb{R})$, on obtient une $\mathbb{Q}$-structure de Hodge $(V_{\mathbb{Q}}, g\rho h g^{-1})$ sur $V_{\mathbb{Q}}$. Soit X la $G(\mathbb{R})$-classe de conjugaison de h. Alors X est un espace de paramètres pour des $\mathbb{Q}$-structures de Hodge sur $V_{\mathbb{Q}}$. On aimerait obtenir les propriétés naturelles suivantes :

(a) On voudrait que X paramétrise des $\mathbb{Q}$-structures de Hodge **polarisées** pures de poids donné n. Soit $C_g = (g\rho h g^{-1})(i)$, on cherche donc une polarisation naturelle

$$\phi : V_{\mathbb{Q}} \otimes V_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Q}(-n)$$

telle que

$$(2i\pi)^n \phi(v \otimes C_g.w)$$

soit (pour tout $g \in G(\mathbb{R})$) une forme bilinéaire symmétrique définie positive sur $V_{\mathbb{R}}$.

(b) On voudrait que $X \simeq G(\mathbb{R})/Z_G(h)$ soit muni d'une structure de variété complexe. On obtiendra en fait une structure d'espace symétrique hermitien sur X.

(c) Les $\mathbb{Q}$-structures de Hodge paramétrisées par X devraient varier holomorphiquement. On devrait obtenir ainsi plus précisément une variation de structures de Hodge sur X.

3.2.2 Involutions de Cartan.

Soit $G_{\mathbb{R}}$ un groupe algébrique connexe sur $\mathbb{R}$. On note $g \to \overline{g}$ la conjugaison complexe sur $G(\mathbb{C})$. Un involution θ de $G_{\mathbb{R}}$ est une **involution de Cartan** si

$$G^{\theta}(\mathbb{R}) := \{g \in G(\mathbb{C}) |\ g = \theta(\overline{g})\}$$

est compact.

Example 3.15 *L'exemple principal est $G_{\mathbb{R}} = \mathrm{GL}_{n,\mathbb{R}}$, $\theta.M = ({}^tM)^{-1}$,*

$$G^{\theta}(\mathbb{R}) = \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), {}^t\overline{g}g = \mathbf{1}_n\} = U(n)$$

est compact donc θ est une involution de Cartan.

Théorème 3.16 *Il existe une involution de Cartan sur $G_{\mathbb{R}}$ si et seulement si $G_{\mathbb{R}}$ est réductif. Les involutions de Cartan de $G_{\mathbb{R}}$ sont conjugués sous $G(\mathbb{R})$.*

On remarque que si $G(\mathbb{R})$ est compact, l'identité de $G_{\mathbb{R}}$ est une involution de Cartan de $G_{\mathbb{R}}$.

Soit $G \to \mathrm{GL}(V_{\mathbb{R}})$ une représentation fidèle de $G_{\mathbb{R}}$. Alors $G_{\mathbb{R}}$ est réductif si et seulement si on peut trouver une base de V telle que G soit stable par $g \mapsto ({}^tg)^{-1}$. Dans cette situation la restriction de $g \mapsto ({}^tg)^{-1}$ à G est une involution de Cartan de $G_{\mathbb{R}}$.

Soit θ une involution de $G_{\mathbb{R}}$. Il existe une unique forme réelle $G^{\theta}_{\mathbb{R}}$ de $G_{\mathbb{C}}$ telle que la conjugaison complexe sur $G^{\theta}(\mathbb{C})$ soit donnée par $g \mapsto \theta(\overline{g})$. Notons aussi que toute forme réelle de $G_{\mathbb{C}}$ est associée à une involution de $G_{\mathbb{R}}$ par ce procédé. Avec cette description, on voit que l'involution θ est de Cartan si et seulement si la fome réelle associée $G^{\theta}_{\mathbb{R}}$ est la forme compact de $G_{\mathbb{C}}$.

Lemme 3.17 *Soit $G_{\mathbb{R}}$ un groupe algébrique connexe sur $\mathbb{R}$. Si $G(\mathbb{R})$ est compact, alors toute représentation réelle de dimension finie*

$$\rho : G_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathrm{GL}(V_{\mathbb{R}})$$

est munie d'une forme bilinéaire $G(\mathbb{R})$-invariante définie positive.

Réciproquement si $G_\mathbb{R}$ admet une repésentation fidèle de dimension finie munie d'une forme bilinéaire $G(\mathbb{R})$-invariante définie positive, alors $G(\mathbb{R})$ est compact.

Preuve. Soit $\rho : G_\mathbb{R} \to \mathrm{GL}(V_\mathbb{R})$ une représentation réelle de dimension finie. Si $G(\mathbb{R})$ est compact, alors $H := \rho(G(\mathbb{R}))$ est compact. Soit d_H la mesure de Haar sur H. Fixons une forme bilinéaire symétrique définie positive $< .,. >$ sur $V_\mathbb{R}$. alors la forme bilinéaire symétrique

$$< u, v >_G = \int_H < h.u, h.v > d_H$$

est $G(\mathbb{R})$-invariante et définie positive.

Réciproquement, soit $< .,. >_G$ une forme $G(\mathbb{R})$-invariante sur une représentation fidèle $(V_\mathbb{R}, \rho)$ de $G_\mathbb{R}$. Alors $G(\mathbb{R})$ s'injecte dans $\mathrm{O}(V_\mathbb{R}, < .,. >_G)$ qui est compact donc $G(\mathbb{R})$ est compact.

Definition 3.18 *Soit $G_\mathbb{R}$ un groupe algébrique réel et $C \in G(\mathbb{R})$ tel que $C^2 \in Z(G(\mathbb{R}))$. On voit que $ad(C)$ est une involution de $G_\mathbb{R}$. Une C-polarisation d'une repésentation réelle $V_\mathbb{R}$ de $G_\mathbb{R}$ est une forme bilinéaire $G(\mathbb{R})$-invariante ϕ sur $V_\mathbb{R}$ telle que la forme bilinéaire*

$$\phi_C(u, v) = \phi(u, c.v)$$

est symétrique et définie positive.

Proposition 3.19 *Si $ad(C)$ est une involution de Cartan de $G_\mathbb{R}$, alors toute représentation (réelle de dimension finie) de $G_\mathbb{R}$ est munie d'une C-polarisation. Réciproquement, si $\rho : G \to G_\mathbb{R}$ est une représentation fidèle munie d'une C-polarisation, alors $ad(C)$ est une involution de Cartan.*

3.2.3 Décompositions de Cartan et Espaces symétriques.

Soit $G_\mathbb{R}$ un groupe algébrique linéaire et θ une involution de Cartan de $G_\mathbb{R}$ (en particulier $G_\mathbb{R}$ est réductif). Soit

$$K_\infty := \{g \in G(\mathbb{R}) |\ \theta(g) = g\},$$

alors K_∞ est un sous-groupe compact maximal de $G(\mathbb{R})$.

Soit

$$\Theta : \mathrm{Lie}(G_{\mathbb{R}}) \longrightarrow \mathrm{Lie}(G_{\mathbb{R}})$$

l'application tangente de θ à l'origine $\mathbf{1}_G$ de θ. Alors $\Theta^2 = 1$ et une involution de $\mathrm{Lie}(G_{\mathbb{R}})$ obtenue de cette manière est appelé involution de Cartan de $\mathrm{Lie}(G_{\mathbb{R}})$. On obtient une décomposition dite de Cartan

$$\mathrm{Lie}(G_{\mathbb{R}}) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$$

avec

$$\mathfrak{k} = \mathrm{Lie}(G_{\mathbb{R}})^+ = \{X \in \mathrm{Lie}(G_{\mathbb{R}}) |\ \Theta(X) = X\}$$

et

$$\mathfrak{p} = \mathrm{Lie}(G_{\mathbb{R}})^- = \{X \in \mathrm{Lie}(G_{\mathbb{R}}) |\ \Theta(X) = -X\}.$$

On vérifie sans peine que $[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}$, $[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$, $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}$. Par conséquent, $\mathfrak{k}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathrm{Lie}(G_{\mathbb{R}})$ de groupe de Lie associé $K_\infty \subset G(\mathbb{R})$.

Proposition 3.20 *Tout élément g de $G(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique sous la forme $g = k \exp(X)$ avec $k \in K_\infty$ et $X \in \mathfrak{p}$. La décomposition $G(\mathbb{R}) = K_\infty \exp(\mathfrak{p})$ ainsi obtenu est appelé décomposition de Cartan de $G(\mathbb{R})$.*

Rappelons la définition suivante.

Definition 3.21 *Soit (X, g) une variété riemannienne . On note $\mathrm{Isom}(X, g)$ (ou $\mathrm{Isom}(X)$) le groupe des isométries de X. On dit que (X, g) est un espace symétrique si tout $x \in X$ est un point fixe isolé d'une isométrie s_x de $\mathrm{Isom}(X)$.*

On suppose que $G(\mathbb{R})$ est un groupe de type adjoint et que $G(\mathbb{R})$ n'est pas compact. Soit $X = G(\mathbb{R})/K_\infty$, alors l'espace tangent à T_X en $\mathbf{1}_G.K_\infty$ est $\mathfrak{p}$. On a une action à gauche de $G(\mathbb{R})$ sur X et cette action induit une action $dk : \mathfrak{p} \to \mathfrak{p}$ de K_∞ sur $\mathfrak{p}$ tangente en $\mathbf{1}_G K_\infty$ à

$$K_\infty \times X \to X$$

$$k.(gK_\infty) = kgK_\infty$$

On peut définir une métrique riemanniene g sur X en fixant une forme bilinéaire g_0 définie positive sur $\mathfrak{p}$ telle que pour tout $k \in K_\infty$, dk est une isométrie $\mathfrak{p}$. Alors g est l'une unique métrique sur X coîncidant avec g_0 sur $\mathfrak{p}$ telle que $G(\mathbb{R})$ agissent par isométrie.

Les involutions de Cartan de $G(\mathbb{R})$ et les décompositions de Cartan sont conjuguées sous $G(\mathbb{R})$. L'espace X s'interprète alors comme l'ensemble des décompositions de Cartan de $G(\mathbb{R})$. Pour $x \in X$, on note $G(\mathbb{R}) = K_{\infty,x} \exp(\mathfrak{p}_x)$ la décomposition de Cartan associée. L'application $Z \mapsto -Z$ de $\mathfrak{p}_x$ induit sur X une isométrie s_x dont x est un point fixe isolé. En particulier X est un espace symétrique de type non compact. Il est classique que l'on obtient tous les espaces symétriques de type non compact par ce procédé.

Example 3.22 *Prenons $G = \mathrm{SL}_{n,\mathbb{R}}$, alors θ est l'application $g \mapsto (g^t)^{-1}$. Alors $K_\infty = \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ et $P = \exp(\mathfrak{p})$ s'identifie à l'ensemble des matrices définies positives de déterminant* 1.

3.2.4 Espaces symétriques hermitiens.

Definition 3.23 *Un espace symétrique hermitien est un espace symétrique X muni d'une structure de variété complexe tel qu'en tout $x \in X$ l'involution associée s_x est une application holomorphe. Il existe donc par définition une structure complexe*

$$J_x : T_{X,x} \to T_{X,x}$$

qui est un endomorphisme de $T_{X,x}$ tel que $J_x^2 = -\mathbf{1}$. La métrique riemannienne g_x sur $T_{X,x}$ vérifie

$$g_x(J_xY, J_xZ) = g_x(Y, Z)$$

pour tout Y, Z dans $T_{X,x}$. On voit alors que g_x est la partie réelle d'une unique forme hermitienne h_x sur $T_{X,x}$ vu comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel. De plus J_x et g_x varient de manière C^∞ pour $x \in X$.

L'énoncé suivant caractérise les espaces symétriques hermitiens en termes classiques [28] et en termes de variations de structures de Hodge suivant l'interprétation de Deligne [17], [18].

Théorème 3.24 *(a) Un espace symétrique hermitien de type non compact est de la forme $X = G(\mathbb{R})/K_\infty$ pour un groupe $G_\mathbb{R}$ de type adjoint et K_∞ un sous-groupe compact maximal de $G(\mathbb{R})$. Si $G_\mathbb{R}$ est simple alors l'espace symétrique X est hermitien si et seulement si on a un isomorphisme*

$$Z(K_\infty) \simeq \mathbb{U}^1.$$

(b) Soit $h : \mathbb{S} \to G_{\mathbb{R}}$ avec $G_{\mathbb{R}}$ un groupe réductif non compact tel que

(D1) $\mathrm{Lie}(G_{\mathbb{C}})$ *est une structure de Hodge de type* $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, -1)$.

(D2) $\mathrm{int}\ h(i)$ *induit une involution de Cartan de* $G_{\mathbb{R}}^{ad}$.

Soit X la $G(\mathbb{R})$-classe de conjugaison de h. Alors les composantes connexes de X sont des espaces symétriques hermitiens. Tout espace symétrique hermitien est obtenu de cette manière (même si on se restreint à des groupes $G_{\mathbb{R}}$ de type adjoint).

(c) Dans cette situation, toute représentation $G_{\mathbb{R}} \to \mathrm{GL}(V_{\mathbb{R}})$ induit une variation de structure de Hodge sur X.

3.2.5 Rappels sur les diagrammes de Dynkin.

On commence par des rappels rapides sur les systèmes de racines et les diagrammes de Dynkin. Soit $G_{\mathbb{C}}$ un groupe semi-simple sur $\mathbb{C}$. Soit $T_{\mathbb{C}}$ un tore maximal de $G_{\mathbb{C}}$. Soit $B_{\mathbb{C}}$ un sous-groupe de Borel contenant $T_{\mathbb{C}}$. On notera

$$X = X^*(T_{\mathbb{C}}), \quad Y = X_*(T_{\mathbb{C}})$$

et

$$X_{\mathbb{Q}} = X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}, \quad Y_{\mathbb{Q}} = Y \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}.$$

Soit $\mathcal{R}$ le système de racine de $(G_{\mathbb{C}}, T_{\mathbb{C}})$. Par définition

$$\mathcal{R} = \{\alpha \in X^*(T_{\mathbb{C}}), \quad \text{tel que } \alpha \text{ apparaît dans la représentation adjointe de } G_{\mathbb{C}}\}.$$

Soit $W_{\mathcal{R}} = N_{G_{\mathbb{C}}}(T_{\mathbb{C}})/Z_G(T_{\mathbb{C}})$ le groupe de Weyl de $\mathcal{R}$. Soit $\mathcal{R}^\vee$ le système de racine dual de $\mathcal{R}$. On peut réaliser $\mathcal{R}^\vee$ comme le système de racines associé à un couple $(G_{\mathbb{C}}^\vee, T_{\mathbb{C}}^\vee)$ formé d'un groupe semi-simple $G_{\mathbb{C}}^\vee$ et d'un tore maximal $T_{\mathbb{C}}^\vee$ de $G_{\mathbb{C}}^\vee$. On dispose d'une bijection $\alpha \mapsto \alpha^\vee$ de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{R}^\vee$. On a $(\mathcal{R}^\vee)^\vee \simeq \mathcal{R}$ et $(\alpha^\vee)^\vee = \alpha$ pour tout $\alpha \in \mathcal{R}$.

Il existe un produit scalaire $W_{\mathcal{R}}$-invariant

$$< ., . >: X^*(T_{\mathbb{C}}) \times X_*(T_{\mathbb{C}}) \to \mathbb{Z}.$$

qui nous permet d'identifier $X_{\mathbb{Q}}$ et $Y_{\mathbb{Q}}$. Par ailleurs $W_{\mathcal{R}^\vee} \simeq W_{\mathcal{R}}$ et on a des isomorphismes canoniques $X^*(T_{\mathbb{C}}) = X_*(T_{\mathbb{C}}^\vee)$ et $X_*(T_{\mathbb{C}}) = X^*(T_{\mathbb{C}}^\vee)$.

On note $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ une base de racines positives de $\mathcal{R}$, alors $\mathcal{B}^\vee = \{\alpha_1^\vee, \ldots, \alpha_r^\vee\}$ est une base de $\mathcal{R}^\vee$ et on note $\omega_1, \ldots, \omega_r$ l'ensemble des poids fondamentaux de $\mathcal{R}$ obtenu en prenant le dual de $\{\alpha_1^\vee, \ldots, \alpha_r^\vee\}$ pour le produit scalaire $< ., . >$.

Le réseau des poids radiciels $Q(\mathcal{R})$ est le $\mathbb{Z}$-module libre de rang maximal

$$Q(\mathcal{R}) = \mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \mathbb{Z}\alpha_2 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}\alpha_r.$$

Le réseau des poids $P(\mathcal{R}) = Q(\mathcal{R}^\vee)$ est le $\mathbb{Z}$-module libre de rang maximal

$$P(\mathcal{R}) = Q(\mathcal{R}^\vee) = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}\omega_r.$$

On a une inclusion $Q(\mathcal{R}) \subset P(\mathcal{R})$. Si $G_\mathbb{C}$ est adjoint alors

$$X^*(T_\mathbb{C}) = Q(\mathcal{R}),$$

et si $G_\mathbb{C}$ est simplement connexe alors

$$X^*(T_\mathbb{C}) = P(\mathcal{R}),$$

On notera enfin $\tilde{\alpha}$ la plus grande racine de $\mathcal{R}$. On a donc

$$\tilde{\alpha} = \sum_{i=1}^{r} n_i \alpha_i$$

et pour toute racine $\alpha = \sum_{i=1}^{r} m_i \alpha_i$ de $\mathcal{R}$, on a $m_i \leq n_i$ pour tout i.

Les sommets du diagramme de Dynkin $\mathcal{D}_\mathcal{R}$ de $\mathcal{R}$ sont indexés par $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$. Un sommet α_i de $\mathcal{D}_\mathcal{R}$ est dit spécial si dans l'écriture de $\tilde{\alpha}$ le coefficient n_i de α_i est 1.

3.2.6 Espaces symmétriques hermitiens en terme de diagramme de Dynkin.

Le but de cette section est de montrer le résultat suivant.

Théorème 3.25 *Les classes d'isomorphismes d'espaces symétriques hermitiens irréductibles sont classifiées par les sommets spéciaux des diagrammes de Dynkin connexes.*

On a en fait le résultat plus précis suivant.

Lemme 3.26 *Soit $G_\mathbb{C}$ un groupe semi-simple de type adjoint sur $\mathbb{C}$. Il y a une bijection entre* *(a) L'ensemble des couples* $(G_{\mathbb{R}}, X)$ *avec* $G_{\mathbb{R}}$ *une forme réelle non compacte de* $G_{\mathbb{C}}$ *et* X *une* $G(\mathbb{R})$*-classe de conjugaison d'un morphisme*

$$h : \mathbb{S} \longrightarrow G_{\mathbb{R}}$$

telle que

(D1) La représentation $\mathrm{Lie}(G_{\mathbb{C}})$ *est de type* $(-1,1)$*,* $(0,0)$*,* $(1,-1)$*.*

(D2) $int(h(i))$ *est une involution de Cartan de* $G_{\mathbb{R}}$*.*

(b) La $G(\mathbb{C})$*-classe de conjugaison d'un cocaractère non trivial*

$$\mu : \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \longrightarrow G_{\mathbb{C}}$$

telle que dans la représentation $\mathrm{Lie}(G_{\mathbb{C}})$ *seule les caractères* z*,* 1*,* z^{-1} *interviennent.*

On passe de $(G_{\mathbb{R}}, X)$ à $(G_{\mathbb{C}}, \mu)$ en associant à h le cocaractère $\mu_h = h_{\mathbb{C}}(z,1)$ (autrement dit en composant l'extension à $\mathbb{C}$ $h_{\mathbb{C}}$ de h avec le cocaractère principal (c.f. section 3.1.2).

Réciproquement soit $g \mapsto \overline{g}$ la conjugaison complexe de sur $G(\mathbb{C})$. Alors $\theta = \mathrm{ad}\mu(i)$ est une involution dont la forme réelle associée G^{θ} est muni d'un morphisme

$$u = \mu_{|\mathbb{U}^1} : \mathbb{U}^1 \to G^{\theta}(\mathbb{R}).$$

Comme G^{θ} est adjoint cela définit un morphisme

$$h : \mathbb{S} \to G^{\theta}_{\mathbb{R}}$$

(trivial sur $\mathbb{G}_{m,\mathbb{R}}$ et coincidant avec u sur $\mathbb{U}^1$). Soit X la $G^{\theta}(\mathbb{R})$-classe de conjugaison de h. Le couple (G^{θ}, X) vérifie les conditions (i) et (ii). On vérifie que les deux constructions sont inverses l'une de l'autre.

Preuve du théorème 3.25 Soit $\mu : \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \to G_{\mathbb{C}}$ vérifiant les hypothèses du b. Comme les tores maximaux de $G_{\mathbb{C}}$ sont conjugués sous $G(\mathbb{C})$, on peut fixer un tore maximal $T_{\mathbb{C}}$ de $G_{\mathbb{C}}$ tel que $\mu(\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}) \subset T_{\mathbb{C}}$. Comme le groupe de Weyl $W_{\mathcal{R}}$ agit transitivement sur les chambres de Weyl, on peut choisir une base de racine positive $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$de $\mathcal{R}$ tel que $< \alpha_i, \mu > \geq 0$ pour tout i. Les caractères de $\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$ intervenant dans $\mathrm{Lie}(G_{\mathbb{C}})$ sont alors les $z^{<\alpha,\mu>}$ pour $\alpha \in \mathcal{R}$.

La condition (b) implique donc que $< \alpha, \mu > \in \{-1, 0, 1\}$ pour tout $\alpha \in \mathcal{R}$. Comme μ est non trivial, il existe i tel que $< \alpha_i, \mu > 0$. Soit $\tilde{\alpha} = \sum n_i \alpha_i$

la plus grande racine. alors $< \tilde{\alpha}, \mu >= 1$, il existe donc un i tel que $n_i = 1$ et $< \alpha_i, \mu >= 1$ et pour tout $j \neq i$ $< \alpha_j, \mu >= 0$. On voit donc que α_i est un sommet spécial de $\mathcal{R}$ et que $\mu = \omega_i^\vee$ est un poids minuscule de $\mathcal{R}^\vee$ (en particulier $\mu = \omega_i^\vee$ est un poids fondamental de $\mathcal{R}^\vee$).

Il est facile de voir que la condition $< \tilde{\alpha}, \mu >= 1$ est équivallente à la condition μ non trivial et $< \alpha, \mu > \in \{-1, 0, 1\}$ pour tout $\alpha \in \mathcal{R}$.

3.2.7 Données de Shimura et variétés de Shimura.

Une donnée de Shimura est un couple $(G_{\mathbb{Q}}, X)$ formée d'un $\mathbb{Q}$-groupe réductif $G_{\mathbb{Q}}$ et d'une $G(\mathbb{R})$-classe de conjugaison de morphismes $h : \mathbb{S} \to G_{\mathbb{R}}$ vérifiant les conditions de Deligne :

(D1) $Lie(G_{\mathbb{C}})$ est de type $(-1, 1),\ (0, 0),\ (1, -1)$.

(D2) $int(h(i)$ induit une involution de Cartan de G

(D3) Soit $G_{\mathbb{Q}} \simeq ZG_{1,\mathbb{Q}}Z_{2,\mathbb{Q}} \dots G_{r,\mathbb{Q}}$ la décomposition presque directe de $G_{\mathbb{Q}}$ en facteurs presque $\mathbb{Q}$-simples. Alors pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$ $G_i(\mathbb{R})$ n'est pas compact.

Ces définitions impliquent en particulier qu'une composante connexe X^+ de X est un espace symétrique hermitien. Tout espace symétrique hermitien est obtenu de cette manière.

Soit $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ un sous-groupe compact ouvert. On définit la variété de Shimura

$$\mathrm{Sh}_K(G, X) = G(\mathbb{Q}) \backslash [X \times G(\mathbb{A}_f)/K] \tag{12}$$

où $G(\mathbb{Q})$ agit diagonalement à gauche sur $X \times G(\mathbb{A}_f)/K$. On notera pour $x \in X$ et $g \in G(\mathbb{A}_f)$

$$[x, g.K]$$

la classe de (x, gK) dans $\mathrm{Sh}_K(G, X)$. Si $G(\mathbb{R})_+$ désigne le stabilisateur dans $G(\mathbb{R})$ d'une composante connexe X^+ de X et $G(\mathbb{Q})_+ := G(\mathbb{Q}) \cap G(\mathbb{R})_+$, on vérifie sans peine que

$$\mathrm{Sh}_K(G, X) = G(\mathbb{Q})_+ \backslash [X^+ \times G(\mathbb{A}_f)/K].$$

On se permettra d'oublier les crochets dans l'écriture de $\mathrm{Sh}_K(G, X)$.

Proposition 3.27 *L'ensemble $G(\mathbb{Q})_+ \backslash G(\mathbb{A}_f)/K$ est fini. On se donne un système de représentants $\{g_1, \dots, g_r\}$ de $G(\mathbb{Q})_+ \backslash G(\mathbb{A}_f)/K$. Alors*

$$\mathrm{Sh}_K(G, X) = \coprod_{i=1}^{r} \Gamma_i \backslash X^+$$

où Γ_i est l'image de $G(\mathbb{Q})^+ \cap g_i K g_i^{-1}$ dans $G^{ad}(\mathbb{Q})^+$.

Preuve

Pour la finitude du **groupe de classes** $G(\mathbb{Q})_+ \backslash G(\mathbb{A}_f)/K$ le lecteur peur consulter le chapitre 5.1 du livre de Platonov et Rapinchuk [46] en particulier le thm 5.1 p. 251.

Soit $[x, gK] \in \mathrm{Sh}_K(G, X)$. Soit $\alpha \in G(\mathbb{Q})_+$, $k \in K$ et $i \in \{1, \ldots, r\}$ tels que $g = \alpha g_i k$. Alors, $[x, gK] = [\alpha^{-1}.x, g_i K]$.

Soit x_1 et x_2 des éléments de X^+ tels que $[x_1, g_i K] = [x_2, g_i K]$. Il existe alors $\beta \in G(\mathbb{Q})^+$ et $k' \in K$ tels que

$$\alpha.x_1 = x_2 \quad \text{ et } \alpha g_i \alpha^{-1} = g_i.$$

On en déduit que $\alpha \in G(\mathbb{Q})^+ \cap g_i K g_i^{-1}$.

L'application

$$\mathrm{Sh}_K(G, X) \to \coprod_{i=1}^{r} \Gamma_i \backslash X^+$$

$$[x, g_j K] \mapsto \Gamma_j x \in \Gamma_j \backslash X^+$$

est alors bien définie et est un isomorphisme.

Dans cette situation les Γ_i sont des réseaux de X^+. Par définition les Γ_i sont donc de volume fini pour la mesure $G(\mathbb{R})_+$-invariante sur X^+. Ceci résulte d'un théorème de Borel [10] qui sera rappelé dans la section 4.1.

D'après les résultats de Baily et Borel [3] les $\Gamma_i \backslash X^+$ ont une structure naturelle de variété algébrique quasi-projective. De plus si $K_1 \subset K_2$ sont deux sous-groupes compacts ouverts de $G(\mathbb{A}_f)$ le morphisme naturel

$$\mathrm{Sh}_{K_1}(G, X) \longrightarrow \mathrm{Sh}_{K_2}(G, X)$$

est algébrique.

Si Γ_i est sans torsion, alors $\Gamma_i \backslash X^+$ est une variété lisse. On utilise en général une notion un peu plus forte qui est celle de sous-groupes arithmétques **nets**.

3.2.8 Sous-groupes arithmétiques nets.

Soit $G_{\mathbb{Q}}$ un groupe algébrique linéaire sur $\mathbb{Q}$. Fixons une représentation fidèle $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_{n,\mathbb{Q}}$. Nous référons au livre de Borel [9] et à la section 0.6

de la thèse de Pink [44] pour la notion de sous-groupe net de $G(\mathbb{Q})$ ou de $G(\mathbb{A}_f)$.

Un élément $g \in G(\mathbb{Q})$ est dit net si le sous-groupe de $\overline{\mathbb{Q}}^*$ engendré par les valeurs propres de g est sans torsion. Un sous-groupe Γ de $G(\mathbb{Q})$ est dit net si tout élément de γ est net. En particulier un sous-groupe net est sans torsion. On vérifie que la notion de sous-groupe net de $G(\mathbb{Q})$ ne dépend pas du choix de la représentation fidèle ρ de $G_{\mathbb{Q}}$.

Soit $g = (g_p)_p \in G(\mathbb{A}_f)$. Soit Λ_p le sous-groupe de $\overline{\mathbb{Q}}_p^*$ engendré par par les valeurs propres de g_p. Soit $\iota_p : \overline{\mathbb{Q}} \to \overline{\mathbb{Q}}_p^*$ un plongement. Comme tout sous-groupe de $\overline{\mathbb{Q}}^*$ formé de racines de l'unité est invariant par $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ le sous-groupe de torsion $(\iota_p(\overline{\mathbb{Q}}^*) \cap \Lambda_p)_{tors}$ ne dépend pas de ι_p. On dit que g est net si

$$\cap_p(\iota_p(\overline{\mathbb{Q}}^*) \cap \Lambda_p)_{tors} = \{1\}.$$

Un sous-groupe K de $G(\mathbb{A}_f)$ est net si tous ses éléments sont nets. Il suffit pour cela que pour un p le groupe $(\iota_p(\overline{\mathbb{Q}}^*) \cap \Lambda_p)_{tors}$ soit trivial. Cette notion est encore indépendante de la représentation fidèle ρ. Si K est un sous-groupe compact ouvert net de $G(\mathbb{A}_f)$ alors pour tout $g \in G(\mathbb{A}_f)$, gKg^{-1} est net. On en déduit que les réseaux $\Gamma_i \subset G(\mathbb{Q})$ de la proposition 3.27 sont nets.

Soit $H_{\mathbb{Q}} \subset G_{\mathbb{Q}}$ un sous-groupe algébrique. Si $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ est un sous-groupe net alors $H(\mathbb{A}_f) \cap K$ est un sous-groupe net de $H(\mathbb{A}_f)$. Si $\phi : G \to H$ est un homomorphisme de groupes algébrique et $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ est net alors $\phi(K)$ est un sous-groupe net de $H(\mathbb{A}_f)$.

Enfin on peut pour des questions indépendantes du niveau (comme la conjecture d'André-Oort) se ramener au cas net car si $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ est un sous-groupe compact ouvert, il existe une sous-groupe K' d'indice fini de K tel que K' soit net.

3.3 Sous-variétés spéciales des variétés de Shimura.

3.3.1 Sous-données de Shimura.

Un morphisme de données de Shimura

$$f : (G_1, X_1) \to (G_2, X_2)$$

est la donnée d'un morphisme de groupe algébrique $f : G_1 \to G_2$ induisant une application de X_1 dans X_2. Autrement dit fixons $x \in X_1$ alors $fx \in X_2$ et X_2 est la $G_2(\mathbb{R})$-classe de conjugaison de fx. Une sous-donnée de Shimura

(H, X_H) de $(G_{\mathbb{Q}}, X)$ est un morphisme de donnée de Shimura donnée par l'inclusion d'un sous-groupe algébrique $H_{\mathbb{Q}}$ de $G_{\mathbb{Q}}$. Il existe donc

$$x : \mathbb{S} \to H_{\mathbb{R}}$$

avec $x \in X$ tel que X_H soit la $H(\mathbb{R})$-classe de conjugaison de x.

On dispose en fait d'une sorte de réciproque.

Proposition 3.28 *Soit $(G_{\mathbb{Q}}, X)$ une donnée de Shimura avec $G_{\mathbb{Q}}$ semi-simple de type adjoint. Soit $H_{\mathbb{Q}}$ un $\mathbb{Q}$-sous-groupe algébrique de $G_{\mathbb{Q}}$. Supposons qu'il existe $x \in X$ se factorisant par $H_{\mathbb{R}}$. Alors $H_{\mathbb{Q}}$ est réductif et*

(i) $\mathrm{Lie}(H_{\mathbb{C}})$ *est de type* $(1,-1)$, $(0,0)$, $(-1,1)$.

(ii) $\mathrm{int}(x(\sqrt{-1}))$ *induit une involution de Cartan de* $H_{\mathbb{R}}^{ad}$

Si $H_{\mathbb{Q}}$ est sans $\mathbb{Q}$-facteur $\mathbb{R}$-anisotrope (i.e. $H_{\mathbb{Q}}$ vérifie la condition de Deligne D3) et si X_H désigne la $H(\mathbb{R})$-classe de conjugaison de x, alors (H, X_H) est une sous-donnée de Shimura de $(G_{\mathbb{Q}}, X)$. C'est en particulier le cas si $H_{\mathbb{Q}}$ est le groupe de Mumford-Tate de x.

Notons tout d'abord le résultat suivant de Eskin, Mozes et Shah ([26], Lemme 5.1) suivant.

Lemme 3.29 *Soit $F_{\mathbb{Q}}$ un groupe réductif connexe. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(C_1) $F_{\mathbb{Q}}$ n'est pas contenu dans un $\mathbb{Q}$-sous-groupe parabolique propre de $G_{\mathbb{Q}}$.

(C_2) Le centralisateur $Z_{G_{\mathbb{Q}}}(F_{\mathbb{Q}})$ de $F_{\mathbb{Q}}$ dans $G_{\mathbb{Q}}$ est $\mathbb{Q}$-anisotrope.

(C_3) Tout $\mathbb{Q}$-sous-groupe de $G_{\mathbb{Q}}$ contenant $F_{\mathbb{Q}}$ est réductif.

Indiquons la preuve de la proposition 3.28. Comme $G_{\mathbb{R}}$ est adjoint, le centralisateur de $x(\sqrt{-1})$ dans $G(\mathbb{R})$ est un compact maximal K_x de $G(\mathbb{R})$. Prenons pour $F_{\mathbb{Q}}$ le groupe de Mumford-Tate de x, alors $Z_{G_{\mathbb{R}}}(F_{\mathbb{R}}) \subset Z_{G_{\mathbb{R}}}(x(\sqrt{-1})) = K_x$. On en déduit que $Z_{G_{\mathbb{Q}}}(F_{\mathbb{Q}})$ est $\mathbb{Q}$-anisotrope car son extension à $\mathbb{R}$ est $\mathbb{R}$-anisotrope. Par définition des groupes de Mumford-Tate $F_{\mathbb{Q}} \subset H_{\mathbb{Q}}$. L'équivalence des conditions (C_2) et (C_3) montre que $H_{\mathbb{Q}}$ est réductif.

On constate que x vérifie (i) car $Lie(H_{\mathbb{R}})$ est un sous espace de $Lie(G_{\mathbb{R}})$ invariant par $\mathbb{S}$.

Comme $C = x(\sqrt{-1})$ est de carré central dans $H(\mathbb{R})$, il suffit d'après ([18] 1.1.15 c.f. proposition 3.19) de voir que $G_{\mathbb{R}}$ admet une représentation réelle (V,ρ) fidèle et C-polarisable. Il suffit de prendre $V = Lie(G_{\mathbb{R}})$ pour la représentation adjointe et la C-polarisation induite par la forme de Killing $B(X,Y)$ (de sorte que $B(X,CY)$ est proportionnelle à une forme bilinéaire symétrique et définie positive).

Si $H_{\mathbb{Q}}$ est de plus sans $\mathbb{Q}$-facteurs $\mathbb{R}$-anisotropes alors $(H_{\mathbb{Q}}, X_H)$ vérifie les conditions de Deligne (D1), (D2) et (D3) donc $(H_{\mathbb{Q}}, X_H)$ est une sous-donnée de Shimura de $(G_{\mathbb{Q}}, X)$.

Supposons finalement que $H_{\mathbb{Q}}$ est le groupe de Mumford-Tate de x. Comme $\mathrm{int}(x(\sqrt{-1}))$ est un involution de Cartan de $H^{ad}_{\mathbb{R}}$, $x(\sqrt{-1})$ centralise tout les facteurs $\mathbb{R}$-compacts de $H_{\mathbb{R}}$. Si $L_{\mathbb{Q}}$ est un $\mathbb{Q}$-facteur de $H_{\mathbb{Q}} \simeq L_{\mathbb{Q}}L'_{\mathbb{Q}}$ qui est $\mathbb{R}$-compact alors $x(\sqrt{-1})$ centralise $L_{\mathbb{R}}$. Ecrivons la décomposition

$$\mathrm{Lie}(L_{\mathbb{C}}) = \mathrm{Lie}(L_{\mathbb{C}})^{-1,1} \oplus \mathrm{Lie}(L_{\mathbb{C}})^{1,-1} \oplus \mathrm{Lie}(L_{\mathbb{C}})^{0,0}.$$

Alors $x(\sqrt{-1})$ agit à la fois trivialement et par multiplication par $-1 = \frac{i}{\bar{i}}$ sur $\mathrm{Lie}(L_{\mathbb{C}})^{-1,1}$. On en déduit que $\mathrm{Lie}(L_{\mathbb{C}})^{-1,1} = \{0\}$ et donc aussi que $\mathrm{Lie}(L_{\mathbb{C}})^{1,-1} = \{0\}$. Il résulte de cela que $x(\mathbb{S})$ centralise $L_{\mathbb{R}}$ et donc que x se factorise par $L'_{\mathbb{R}}$. Ceci contredit la définition des groupes de Mumford-Tate.

3.3.2 Sous-variétés spéciales des variétés de Shimura.

Soit (G,X) une donnée de Shimura. Soit K un sous-groupe compact ouvert de $G(\mathbb{A}_f)$. On fixe une composante connexe X^+ de X. Soit $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ un sous-groupe compact ouvert. En utilisant la notation de la proposition 3.27 on définit la variété de Shimura

$$\mathrm{Sh}_K(G,X) = G(\mathbb{Q})\backslash[X \times G(\mathbb{A}_f)/K] = \coprod_{i=1}^{r} \Gamma_i\backslash X^+ \tag{13}$$

Soit $\Gamma := G(\mathbb{Q})^+ \cap K$ et $S = \Gamma\backslash X^+$. Alors S est une composante irréductible de $\mathrm{Sh}_K(G,X)$.

Nous aurons besoin de la définition des opérateurs de Hecke dans ce cadre (voir par exemple [40] 1.6.1).

Definition 3.30 *Soient $g \in G(\mathbb{A}_f)$ et $K_g = K \cap gKg^{-1}$. La correspondance de Hecke T_g sur $Sh_K(G,X)(\mathbb{C})$ est définie par le diagramme*

$$Sh_K(G,X)_{\mathbb{C}} \xleftarrow{\pi_1} Sh_{K_g}(G,X)_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\pi_2} Sh_K(G,X)_{\mathbb{C}}$$

où π_1 est donné par l'inclusion $K_g \subset K$ et π_2 est l'application

$$[x, \theta] \to [x, \theta g].$$

Soit Z une sous-variété de $Sh_K(G,X)_{\mathbb{C}}$, on note $T_g.Z$ le cycle $\pi_{2*}\pi_1^*Z$ de $Sh_K(G,X)_{\mathbb{C}}$. On dit que $T_g.Z$ est le translaté de Z par l'opérateur de Hecke T_g.

On suppose dans la suite de cette section que $G = G^{ad}$ est un groupe adjoint donc que X^+ est une $G(\mathbb{R})^+$ classe de conjugaison de morphismes de

$$\mathbb{S} \to G_{\mathbb{R}}.$$

Soit (H, X_H) une sous-donnée de Shimura. Si $K_H = K \cap H(\mathbb{A}_f)$, on dispose d'un morphisme induit de variétés de Shimura

$$\psi: \; Sh_{K_H}(H, X_H)_{\mathbb{C}} \longrightarrow Sh_K(G,X)_{\mathbb{C}}.$$

On choisit alors un système de représentants $R_{H,K}$ de

$$H(\mathbb{Q})_+ \backslash H(\mathbb{A}_f)/K_H,$$

on a donc

$$Sh_{K_H}(H, X_H)_{\mathbb{C}} = \cup_{\lambda \in R_{H,K}} \Delta_\lambda \backslash X_H^+$$

avec $\Delta_\lambda = H(\mathbb{Q})_+ \cap \lambda K_H \lambda^{-1}$.

Definition 3.31 *Avec les notations précédentes, une sous-variété de la forme $\psi(\Delta_\lambda \backslash X_H^+)$ est appelée sous-variété de type Shimura de $Sh_K(G,X)(\mathbb{C})$. Une composante irréductible d'un translaté par un opérateur de Hecke d'une sous-variété de type Shimura de $Sh_K(G,X)(\mathbb{C})$ est appelée sous-variété spéciale ou sous-variété de type de Hodge.*

La translation par l'opérateur de Hecke dans la définition précédente est anodine en vertu du lemme suivant qui montre qu'il y a très peu de différences entre sous-variétés de Shimura et sous-variétés spéciales.

Lemme 3.32 *Soit $R_{G,K}$ un système de représentants de*

$$G(\mathbb{Q})_+ \backslash G(\mathbb{A}_f)/K,$$

Soit V une sous-variété de type de Hodge de $Sh_K(G,X)_{\mathbb{C}}$. Il existe $\beta \in R_{G,K}$ et une sous-variété de type Shimura V_1 tels que V est une composante irréductible de $T_\beta.V_1$.

Preuve. Il existe une sous-donnée de Shimura (H, X_H) et $\lambda \in G(\mathbb{A}_f)$ tels que V est l'image de $X_H \times \lambda K$ dans $Sh_K(G,X)(\mathbb{C})$. On peut écrire $\lambda = \gamma\beta k$ avec $\gamma \in G(\mathbb{Q})_+$, $\beta \in R_{G,K}$ et $k \in K$. Soient $H_\gamma = \gamma^{-1} H \gamma$ et X_γ la $H_\gamma(\mathbb{R})$-classe de conjugaison de $\gamma^{-1}.x_0$ pour un $x_0 \in X_H$, (H_γ, X_γ) est une sous-donnée de Shimura et V est aussi l'image de $X_\gamma \times \beta K$ dans $Sh_K(G,X)_{\mathbb{C}}$. On en déduit que V est une composante irréductible de

$$T_\beta . Sh_{K \cap H_\gamma(\mathbb{A}_f)}(H_\gamma, X_\gamma)_{\mathbb{C}}.$$

Definition 3.33 *Un point x de S est dit Hodge générique si il n'est pas contenu dans une sous-variété spéciale Z de S avec $Z \neq S$. Un point de X^+ est dit Hodge générique si son image dans S est Hodge générique. On définit de même la notion de points Hodge générique d'une composante connexe arbitraire de $\mathrm{Sh}_K(G,X)$. On vérifie sans peine que cette notion coïncide sur X^+ avec celle donnée à la définition 3.13 une fois que l'on utilise l'interprétation de X^+ en terme de variations de structures de Hodge donnée au théorème 3.24. Par ailleurs on montre que si K est net, la variation de structures de Hodge sur X^+ descend en une variation de structures de Hodge sur S. On vérifie sans peine que la définition d'être Hodge générique pour un point x de S rentre alors dans le cadre de la définition 3.13.*

Si on ne s'intéresse qu'aux sous-variétés spéciales de la composante S, il n'y a pas, au vu de la preuve précédente, de différences entre sous-variétés de Shimura et sous-variétés spéciales. On a en fait un lemme plus précis qui permet de supposer que H est le groupe de Mumford-Tate générique de X_H. Par définition cela signifie que H est le plus petit sous-groupe algébrique M de $G_{\mathbb{Q}}$ tel que pour tout $x \in X_H$, x se factorise par $M_{\mathbb{R}}$.

Lemme 3.34 *Soit V une sous-variété spéciale de S. Remarquer que S est l'image de $X^+ \times \{1\}$ dans $\mathrm{Sh}_K(G,X)$. Il existe une sous-donnée de Shimura (H, X_H) de (G,X) telle que H est le groupe de Mumford-Tate générique de X_H et tel que V est l'image de $X_H^+ \times \{1\}$ dans S pour une composante X_H^+ de X_H. En particulier V est une sous-variété de Shimura.*

Preuve. Soit $v \in V \subset S$ un point Hodge générique de V et $x \in X^+$ s'envoyant sur v. Soit H le groupe de Mumford-Tate de x, $X_H := H(\mathbb{R}).x$ et $X_H^+ := H(\mathbb{R})^+.x$. Alors, par la proposition 3.28, (H, X_H) est une sous-donnée de Shimura de (G,X). Soit V' l'image de $X_H^+ \times \{1\}$ dans $\mathrm{Sh}_K(G,X)$. Alors

V' est une sous-variété spéciale contenant v. Comme v est Hodge générique dans V, on a $V' \subset V$. Comme V et V' sont irréductibles et ont la même dimension ($dim(X_H^+)$) on a $V = V'$.

Remarque 3.35 *Soit V une sous-variété spéciale de S. Le groupe H du lemme 3.34 n'est bien défini qu'à conjugaison par $\gamma \in \Gamma$ près. Cela correspond à changer x par $\gamma.x$ dans la preuve précédente. Si on fixe un domaine fondamental $\mathcal{F}$ de X pour l'action de Γ, alors V détermine H si on fait la convention dans la preuve précédente que $x \in \mathcal{F}$.*

3.3.3 Corps reflex des données de Shimura.

Soit (G, X) une donnée de Shimura. Pour tout $x \in X$ on note $\mu_x = x_{\mathbb{C}}\mu$ le cocaractère de $G_{\mathbb{C}}$ composé du caractère principal $\mu : \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \to \mathbb{S}_{\mathbb{C}}$ et de l'extension complexe $x_{\mathbb{C}} : \mathbb{S}_{\mathbb{C}} \to G_{\mathbb{C}}$ de x.

Definition 3.36 *Le corps reflex de $(G_{\mathbb{Q}}, X)$ est le corps de définition de la $G(\mathbb{C})$-classe de conjugaison de μ_x. On note $E(G_{\mathbb{Q}}, X)$ le corps reflex de $(G_{\mathbb{Q}}, X)$. On vérifie qu'il ne dépend pas du choix de $x \in X$. Le corps reflex est un corps de nombres que l'on peut considérer comme sous-corps de $\overline{\mathbb{Q}}$.*

(a) Si $(H_{\mathbb{Q}}, X_H) \subset (G_{\mathbb{Q}}, X)$ est une sous-donnée de Shimura, alors

$$E(G_{\mathbb{Q}}, X) \subset E(H_{\mathbb{Q}}, X_H).$$

(b) Si $T_{\mathbb{Q}}$ est un $\mathbb{Q}$-tore dans $G_{\mathbb{Q}}$ et qu'il y a pour un $h \in X$ une factorisation $h : \mathbb{S} \to T_{\mathbb{R}}$ alors $E(T_{\mathbb{Q}}, \{h\})$ est le corps de définition de μ_h.

(c) $E(G_{\mathbb{Q}}, X)$ est un corps de nombres qui est soit totalement réel soit à multiplication complexe.

(d) On note $\pi^{ad} : G \to G^{ad}$ et $\pi^{ab}G \to C := G/G^{der}$. Soit $x \in X$. Soit X^{ad} la $G^{ad}(\mathbb{R})$ classe de conjugaison de $\pi^{ad}x$. Alors (G^{ad}, X^{ad}) est une donnée de Shimura inépendante du choix de $x \in X$. De même $(C, \{\pi^{ab}x\})$ est une donnée de Shimura indépendante de $x \in X$ (définissant une variété de Shimura de type CM). Alors $E(G, X)$ est le sous-corps de $\overline{\mathbb{Q}}$ engendré par $E(G^{ad}X^{ad})$ et $E(C, \{\pi^{ab}x\})$.

Deligne ([18] 2.3.5) explique le calcul de $E(G, X)$ pour G adjoint en terme de diagrammes de Dynkin. Des exemples explicites du calcul de $E(G, X)$ dans des exemples intéréssants sont donnés par Milne ([37] 12.1–12.4).

Le calcul de $E(T, \{x\})$ pour une donnée de Shimura de type CM s'explique en terme de type CM. Le lecteur intéressé par la complexité combinatoire de la question peut consulter le texte de Dodson [22].

3.3.4 Morphismes de réciprocités.

Soit $T_{\mathbb{Q}}$ un $\mathbb{Q}$-tore dans $G_{\mathbb{Q}}$ et $h \in X$ tel que l'on ait une factorisation $h : \mathbb{S} \to T_{\mathbb{R}}$. Alors $E = E(T_{\mathbb{Q}}, \{h\})$ est le corps de définition de μ_h. On note $\mathcal{R}_E = \mathrm{Res}_{E/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_{m,E}$. On dispose donc d'un morphisme

$$\mu_E : \mathbb{G}_{m,E} \longrightarrow T_E$$

dont l'extension à $\mathbb{C}$ est μ_h.

Comme $\mathbb{G}_m$ et T sont définis sur $\mathbb{Q}$ on obtient par restriction à la Weil le morphisme

$$\mathrm{Res}_{E/\mathbb{Q}}(\mu_E) : \mathrm{Res}_{E/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_{m,E} \longrightarrow \mathrm{Res}_{E/\mathbb{Q}}T_E.$$

On dispose aussi d'un morphisme norme

$$N_{E/\mathbb{Q}} : \mathrm{Res}_{E/\mathbb{Q}}T_E \longrightarrow T$$

Definition 3.37 *Le composé*

$$r = r(T_{\mathbb{Q}}, \{h\}) = N_{E/\mathbb{Q}}\mathrm{Res}_{E/\mathbb{Q}}(\mu_E) : \mathcal{R}_E \longrightarrow T$$

est appelé morphisme de réciprocité de $(T_{\mathbb{Q}}, \{h\})$.

Le morphisme $X_*(r)$ associé :

$$X_*(r) : X_*(\mathcal{R}_E) = \oplus_{\sigma:E\to\mathbb{C}}\mathbb{Z}[\sigma] \longrightarrow X_*(T)$$

est donné par

$$[\sigma] \mapsto \mu_h^\sigma.$$

Suivant Deligne ([18] 2.0.15.1) on définit pour tout groupe réductif N

$$\pi(N) := N(\mathbb{A})/N(\mathbb{Q})\rho(\tilde{N}(\mathbb{A}))$$

où $\rho : \tilde{N} \to N^{der}$ désigne le revêtement universel de N^{der}. Deligne définit aussi

$$\overline{\pi_o}(\pi(N)) := \pi_0(\pi(N))/\pi_0(N(\mathbb{R})_+).$$

La théorie du corps de classes identifie alors $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/E)^{ab}$ à $\pi_0(\pi(R_E))$.

Le morphisme de réciprocité induit sur les points rationnels et les points adèliques

$$r_{\mathbb{Q}} : \mathcal{R}_E(\mathbb{Q}) = E^\times \longrightarrow T(\mathbb{Q})$$

$$r_{\mathbb{A}} : R_E(\mathbb{A}) = (\mathbb{A} \otimes E)^{\times} \longrightarrow T(\mathbb{A})$$

et

$$r_{\mathbb{A}/\mathbb{Q}} : \overline{\pi_o}(\pi(\mathcal{R}_E)) \to \overline{\pi_o}(\pi(T)).$$

On note $T(\mathbb{Q})^-$ l'adhérence de $T(\mathbb{Q})$ dans $T(\mathbb{A}_f)$. Un calcul simple montre que $\overline{\pi_o}(\pi(T)) \simeq T(\mathbb{A}_f)/T(\mathbb{Q})^-$. On obtient alors un morphisme encore noté $r : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/E) \to T(\mathbb{A}_f)/T(\mathbb{Q})^-$ en composant les morphismes

$$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/E) \to \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/E)^{ab} \simeq \overline{\pi_o}(\pi(R_E)) \to \overline{\pi_o}(\pi(T)) \simeq T(\mathbb{A}_f)/T(\mathbb{Q})^-.$$

Soit K_T un sous-groupe compact ouvert de $T(\mathbb{A}_f)$. On obtient une action continue de $\mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$ sur $\mathrm{Sh}_{K_T}(T_{\mathbb{Q}}, \{h\})$ donnée pour $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$ et $[h, tK_T] \in \mathrm{Sh}_{K_T}(T_{\mathbb{Q}}, \{h\})$ par

$$\sigma.[h, tK_T] = [h, r(\sigma)tK_T]. \tag{14}$$

Au total $\mathrm{Sh}_{K_T}(T_{\mathbb{Q}}, \{h\})_{\mathbb{C}}$ est un ensemble fini muni d'une action de Galois continue de $\mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$. Il admet donc un modèle canonique sur E qui est un schéma fini sur E que l'on notera $\mathrm{Sh}_{K_T}(T_{\mathbb{Q}}, \{h\})_E$.

3.3.5 Modèles canoniques.

Soit $(G_{\mathbb{Q}}, X)$ une donnée de Shimura et K un sous-groupe compact ouvert de $G(\mathbb{A}_f)$. Pour tout $x \in X$, on note

$$\Sigma_x := \{[x, aK] \ a \in G(\mathbb{A}_f)\} \subset \mathrm{Sh}_K(G, X)$$

On rappelle que $x \in X$ est dit spécial si le groupe de Mumford-Tate $\mathrm{MT}(x)$ est un tore. Un point $[x, aK] \in \mathrm{Sh}_K(G, X)$ est dit spécial si x est spécial. Cette définition ne dépend pas du choix des représentants de $[x, aK]$ car si $\alpha \in G(\mathbb{Q})$ alors $\mathrm{MT}(\alpha.x) = \alpha^{-1}\mathrm{MT}(x)\alpha$. Si $(T_{\mathbb{Q}}, \{x\})$ est une sous-donnée de Shimura de $(G_{\mathbb{Q}}, X)$ alors $K_T = K \cap T(\mathbb{A}_f)$ est un sous-groupe compact ouvert de $T(\mathbb{A}_f)$ et l'image de

$$\mathrm{Sh}_{K_T}(T_{\mathbb{Q}}, \{x\})$$

dans $\mathrm{Sh}_K(G, X)$ est formé de points spéciaux et on peut obtenir tous les points spéciaux de cette manière (peut-être à la translation par un nombre fini d'opérateurs de Hecke).

Definition 3.38 *Soit* $E = E(G, X)$ *le corp reflex de* (G, X)*. Un modèle canonique de* $\mathrm{Sh}_K(G, X)_{\mathbb{C}}$ *est un modèle* $\mathrm{Sh}_K(G, X)_E$ *de* $\mathrm{Sh}_K(G, X)_{\mathbb{C}}$ *sur* E *tel que pour toute sous-donnée de Shimura* $(T, \{x\})$ *de* (G, X)*, où* T *est un* $\mathbb{Q}$*-tore algébrique, le morphisme* $\mathrm{Sh}_{K_T}(T, \{x\})_{\mathbb{C}} \to \mathrm{Sh}_K(G, X)_{\mathbb{C}}$ *se descend en un morphisme*

$$\mathrm{Sh}_{K_T}(T_{\mathbb{Q}}, \{h\})_F \otimes_F EF \to \mathrm{Sh}_K(G, X)_E \otimes_E EF.$$

Dans cette équation F *désigne le corps reflex de* $(T, \{x\})$ *et* EF *le sous-corps de* $\overline{\mathbb{Q}}$ *engendré par* E *et* F*.*

Un argument utilisant l'existence de nombreux points CM sur $\mathrm{Sh}_K(G, X)$ permet de montrer l'unicité du modèle canonique. Le résultat suivant est l'aboutissement de nombreux travaux dus entre autres à Shimura, Deligne, Borovoi, Milne et Shih.

Théorème 3.39 *Soit* $(G_{\mathbb{Q}}, X)$ *une donnée de Shimura et* K *un sous-groupe compact ouvert de* $G(\mathbb{A}_f)$*. Il existe un modèle canonique de* $\mathrm{Sh}_K(G, X)_{\mathbb{C}}$ *sur le corps reflex* E *de* (G, X)*.*

3.3.6 Variations de structures de Hodge.

Soit $(G_{\mathbb{Q}}, X)$ une donnée de Shimura et

$$\eta : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{GL}(V_{\mathbb{Q}})$$

une représentation. On suppose de plus que le poids

$$w : \mathbb{G}_{M,\mathbb{C}} \longrightarrow G_{\mathbb{C}}$$

est défini sur $\mathbb{Q}$. Notons que cette condition est automatique si $G_{\mathbb{Q}}$ est de type adjoint ou plus généralement si η se factorise par $G_{\mathbb{Q}}^{ad}$. Alors η définit une variation de structures de Hodge polarisées (VSHP) sur X de fibré sous-jacent $X \times V_{\mathbb{Q}}$.

Lemme 3.40 *Le groupe de Mumford-Tate générique* M_η *de cette VSHP est un sous-groupe normal de* $\eta(G_{\mathbb{Q}})$ *contenant* $\eta(G_{\mathbb{Q}}^{der})$*.*

Pour expliquer le lemme il est bon de définir le groupe de Mumford-Tate générique $\mathrm{MT}(X)$ de $(G_{\mathbb{Q}}, X)$.

Definition 3.41 *Soit* $(G_{\mathbb{Q}}, X)$ *une donnée de Shimura. Le groupe de Mumford-Tate générique* $\mathrm{MT}(X)$ *de* $(G_{\mathbb{Q}}, X)$ *est le plus petit* $\mathbb{Q}$*-sous-groupe algébrique* M *de* $G_{\mathbb{Q}}$ *tel que pour tout*

$$h : \mathbb{S} \to G_{\mathbb{R}}$$

avec $h \in X$*, le morphisme* h *se factorise par* $M_{\mathbb{R}}$*.*

Comme X est une classe de $G(\mathbb{R})$-conjugaison d'un morphisme h, on voit que $\mathrm{MT}(X)_{\mathbb{R}}$ est un sous-groupe normal de $G_{\mathbb{R}}$. On en déduit que $\mathrm{MT}(X)$ est un sous-groupe normal de $G_{\mathbb{Q}}$. La propriété (D3) des données de Shimura assure que $\mathrm{MT}(X)$ contient les $\mathbb{Q}$-facteurs presque simples de $G^{der}_{\mathbb{Q}}$. Finalement $\mathrm{MT}(X)$ est donc un $\mathbb{Q}$-sous-groupe normal de $G_{\mathbb{Q}}$ contenant $G^{der}_{\mathbb{Q}}$. Le lemme 3.40 se déduit simplement du fait que

$$M_{\eta} = \eta(\mathrm{MT}(X)). \tag{15}$$

Soit C la composante connexe du centre de $G_{\mathbb{Q}}/\mathrm{Ker}(\eta)$. Supposons que que C soit le produit presque directe d'un $\mathbb{Q}$-tore déployé C_1 et d'un $\mathbb{Q}$-tore C_2 tel que $C_2(\mathbb{R})$ est compact. Cette condition est aussi vérifiée si η se factorise par $G^{ad}_{\mathbb{Q}}$. On obtient dans cette situation ([39] 2.3) la proposition suivante.

Proposition 3.42 *Soit* $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ *un sous-groupe compact ouvert* **net**. *On fixe un réseau* $V_{\mathbb{Z}}$ *de* $V_{\mathbb{Q}}$ *tel que*

$$\eta(K) \subset \mathrm{GL}(V_{\mathbb{Z}} \otimes \widehat{\mathbb{Z}}).$$

La VSHP sur X *induit une VSHP* $\mathcal{V}_{\eta,\mathbb{Z}}$ *sur* $\mathrm{Sh}_K(G, X)$*.*

On fixe une composante irréductible X^+ de X, soit $\Gamma = G(\mathbb{Q})^+ \cap K$, alors $S = \Gamma \backslash X^+$ est la composante de $\mathrm{Sh}_K(G, X)$ image de $X^+ \times \{1\}$ dans $\mathrm{Sh}_K(G, X)$. On note encore $\mathcal{V}_{\eta,\mathbb{Z}}$ la $\mathbb{Z}$-VSHP sur S obtenu par restriction de $\mathcal{V}_{\eta,\mathbb{Z}}$ à S.

La représentation de monodromie est alors la restriction à $\Gamma \simeq \pi_1(S, s)$ de η. Comme $\Gamma \cap G^{der}(\mathbb{Q})$ est un réseau arithmétique de $G^{der}_{\mathbb{Q}}$, on sait d'après un théorème de Borel [8], que $\Gamma \cap G^{der}(\mathbb{Q})$ est dense dans $G^{der}_{\mathbb{Q}}$. Le groupe de monodromie est alors $\eta(G^{der}_{\mathbb{Q}})^0 \subset \mathrm{GL}(V_{\mathbb{Q}})$. C'est aussi une conséquence du théorème 3.14 et du fait que S possède un point spécial.

Soit Z une sous-variété irréductible de S Hodge générique et Z^{reg} le lieu lisse de Z. On obtient par restriction une $\mathbb{Z}$-variation de structures de Hodge

$\mathcal{V}_{\eta,\mathbb{Z}}^{Z^{reg}}$ sur Z^{reg}. Fixons un point Hodge générique lisse s de Z et un point $\tilde{s}$ de X^+ au dessus de s. Notons

$$\rho_Z : \pi_1(Z^{reg}, s) \longrightarrow \mathrm{GL}(V_{\mathbb{Z}})$$

la représentation de monodromie et Π_Z l'image de ρ_Z. Soit j_Z le morphisme d'inclusion de Z^{reg} dans S et

$$j_{Z*} : \pi_1(Z^{reg}, s) \to \pi_1(S, s)$$

le morphisme induit. La représentation de monodromie ρ_Z est $\eta j_{Z,*}$.

Une nouvelle application du théorème 3.14 donne le lemme suivant.

Lemme 3.43 *Supposons que Z^{reg} contienne un point spécial non singulier. Le groupe de monodromie de $\mathcal{V}_{\eta,\mathbb{Z}}^{Z^{reg}}$ (composante connexe neutre de l'adhérence schématique de Π_Z dans $\mathrm{GL}(V_{\mathbb{Q}})$) est $\eta(G_{\mathbb{Q}}^{der})$.*

Rappelons l'énoncé du théorème suivant dû à Nori ([43] Thm. 4.13).

Théorème 3.44 *Soit H un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ engendré par un nombre fini d'éléments. Soit $\overline{H}$ la clôture de Zariski de H dans $\mathrm{GL}_{n,\mathbb{Z}}$. Si $\overline{H}(\mathbb{C})$ a un groupe fondamental fini la fermeture de H dans $\mathrm{GL}_n(\widehat{\mathbb{Z}})$ est ouverte dans la fermeture de $\overline{H}(\mathbb{Z})$ dans $\mathrm{GL}_n(\widehat{\mathbb{Z}})$.*

Comme Π_Z est engendré par un nombre fini d'éléments et que le groupe fondamental d'un groupe semi-simple sur $\mathbb{C}$ est fini on obtient le corollaire suivant qui nous sera utile dans la section suivante.

Corollaire 3.45 *Soit $\eta(G^{der})_{\mathbb{Z}}$ la fermeture de Zariski de $\eta(G_{\mathbb{Q}}^{der})$ dans $\mathrm{GL}(V_{\mathbb{Z}})$. Soit $\widehat{\Pi}_Z$ la fermeture de Π_Z dans $\mathrm{GL}(V_{\mathbb{Z}} \otimes \widehat{\mathbb{Z}})$. Alors $\widehat{\Pi}_Z$ est ouvert dans $\eta(G_{\mathbb{Q}}^{der})_{\mathbb{Z}}(\widehat{\mathbb{Z}})$.*

3.4 Irréductibilité des images par les opérateurs de Hecke.

Le but de cette section est de montrer le théorème suivant d'Edixhoven et Yafaev.

Soit $(G_{\mathbb{Q}}, X)$ une donnée de Shimura avec $G_{\mathbb{Q}}$ semi-simple de type adjoint. Soit K un sous-groupe compact ouvert net de $G(\mathbb{A}_f)$. On suppose que $K = \prod_p K_p$ pour des sous-groupes compacts ouverts K_p de $G(\mathbb{Q}_p)$. Cette condition n'est pas essentielle mais notons qu'il existe toujours un sous-groupe d'indice fini K' de K qui est un produit (prendre n'importe quelle groupe de congruence principal convenable). Soit X^+ une composante connexe de X et S l'image de $X^+ \times \{1\}$ dans $\mathrm{Sh}_K(G, X)$.

Théorème 3.46 *(Edixhoven-Yafaev [25] thm 5.1). Soit Z une sous-variété irréductible et Hodge générique de S contenant un point spécial non singulier. Il existe un entier n (dépendant de Z) tel que pour tout $q \in G(\mathbb{Q})^+$ dont l'image dans $G(\mathbb{Q}_l)$ est dans K_l pour tout l divisant n la sous-variété $T_q.Z$ de S est irréductible.*

Rappelons la construction de l'opérateur de Hecke T_q de S pour un élément q de $G(\mathbb{Q})$. Soit $\Gamma_q = \Gamma \cap q^{-1}\Gamma q$ et $S_q = \Gamma_q \backslash X^+$. On a deux applications

$$\pi_i : S_q \to S = \Gamma \backslash X^+.$$

La première application π_1 correspond à l'inclusion $\Gamma_g \subset \Gamma$ tandis que π_2 se déduit par passage au quotient de l'application

$$t_q : X^+ \to X^+, \quad x \mapsto q.x$$

Comme K est net, Γ est sans torsion et les π_i sont des recouvrements étales. En particulier les π_i sont propres et plats et induisent des morphismes sur les groupes de cycles et les groupes de Chow :

$$\pi_{i*} : \mathrm{Ch}^i(S_q) \to \mathrm{Ch}^i(S)$$

et

$$\pi_i^* : \mathrm{Ch}^i(S_q) \to \mathrm{Ch}^i(S)$$

La correspondance T_q opérant sur lee cycle Y est alors donné par

$$T_q.Y = \pi_{2*}\pi_1^* Y.$$

Pour montrer l'irréductibilité de $T_q.Z$, il suffit donc de montrer l'irréductibilité de $\pi_1^* Z$. Comme π_1 est un recouvrement étale il en est de même de

$$\pi_1 : Z_q^{reg} \longrightarrow Z^{reg}.$$

Comme Z_q^{reg} est Zariski-dense dans Z, il suffit de montrer l'irréductibilité de Z_q^{reg}.

On reprend les notations de la section précédente, on a en particulier fixé une repésentation $\eta : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}(V_{\mathbb{Q}})$ et un réseau $V_{\mathbb{Z}}$ de $V_{\mathbb{Q}}$ tel que $\eta(K) \subset \mathrm{GL}(V_{\mathbb{Z}} \otimes \widehat{\mathbb{Z}})$. On note Π_Z l'image de $\pi_1(Z^{reg}, s)$ par la représentation de monodromie ρ_Z associée à la $\mathbb{Z}$-VSHP $\mathcal{V}_{\eta,\mathbb{Z}}^{Z^{reg}}$ sur Z^{reg}.

Soit j_Z l'inclusion de Z^{reg}, $\Gamma = \pi_1(S, s)$ est un un $\pi_1(Z^{reg}, s)$-ensemble via $j_{Z*} : \pi_1(Z^{reg}, s) \to \pi_1(S, s)$. Pour $q \in G(\mathbb{Q})^+$, le $\pi_1(Z^{reg}, s)$-ensemble correspondant au recouvrement $\pi_1 : S_q \to S$ est Γ/Γ_q. Il suffit donc de montrer que $\pi_1(Z^{reg}, s)$ agit transitivement sur Γ/Γ_q.

Le théorème de Nori 3.44 et son corollaire 3.45 assurent l'existence d'un $n \in \mathbb{N}$ tel que les images de $\pi_1(Z^{reg}, s)$ et de Γ dans $\mathrm{GL}(V_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}})$ coïncident pour tout m premier à n.

Lemme 3.47 *Il existe un entier m premier à n tel que Γ_q contient le noyau $\Gamma(m)$ de*

$$\psi_m : \Gamma \longrightarrow \mathrm{GL}(V_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}).$$

Si on accepte le lemme, on voit que l'on a une application surjective

$$\Gamma/\Gamma(m) \to \Gamma/\Gamma_q.$$

D'après ce qui précède $\pi_1(Z^{reg}, s)$ agit transitivement sur $\Gamma/\Gamma(m)$ donc $\pi_1(Z^{reg}, s)$ agit transitivement sur Γ/Γ_q.

Pour montrer le lemme, remarquons que $\Gamma_q = q^{-1}Kq \cap K \cap G(\mathbb{Q})^+$ est un sous-groupe de congruence de $G(\mathbb{Q})^+$. Notons que la représentation η étant fidèle, les $\Gamma(m)$ sont les sous-groupes de congruences principaux. On en déduit que Γ_q contient $\Gamma(m)$ pour m suffisamment divisible. On peut choisir m premier à n en utilisant le fait que l'image de q dans $G(\mathbb{Q}_l)$ est contenu dans K_l pour tout l divisant n (on utilise ici par comodité mais non de manière essentielle l'hypothèse que K est produit des K_p).

4 Théorie ergodique sur les espaces homogènes.

4.1 Réseaux arithmétiques des groupes linéaires.

Soit $G_{\mathbb{Q}}$ un groupe algébrique linéaire sur $\mathbb{Q}$ et $X^*(G_{\mathbb{Q}})$ l'ensemble des caractères rationnels de $G_{\mathbb{Q}}$ définis sur $\mathbb{Q}$. On dit que $G_{\mathbb{Q}}$ est de type $\mathcal{F}$ si $X^*(G_{\mathbb{Q}}) = 1$.

On fixe une représentation fidèle $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}(V_{\mathbb{Q}})$ dans un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension finie $V_{\mathbb{Q}}$ et un réseau $V_{\mathbb{Z}}$ de $V_{\mathbb{Q}}$. Soit

$$G(\mathbb{Z}) := \{g \in G(\mathbb{Q}),\ \rho(g) \in \mathrm{GL}(V_{\mathbb{Z}})\}.$$

Rappelons que deux sous-groupes L et L' d'un groupe H sont dit commensurables si $L \cap L'$ est d'indice fini dans L et dans L'. On vérifie sans peine que la commensurabilité est une relation d'équivalence.

Definition 4.1 *(a) Un sous-groupe $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$ est dit arithmétique si Γ est commensurable à $G(\mathbb{Z})$. On montre en fait que cette notion est indépendante des choix de ρ et du réseau $V_{\mathbb{Z}}$ de $V_{\mathbb{Q}}$.*

(b) Soit $G_{\mathbb{R}}$ un groupe algébrique linéaire, un sous-groupe $\Gamma \subset G(\mathbb{R})$ est dit arithmétique si il existe une $\mathbb{Q}$-forme $G_{\mathbb{Q}}$ de $G_{\mathbb{R}}$ telle que $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$ soit un sous-groupe arithmétique de $G(\mathbb{Q})$.

(c) Soit $G_{\mathbb{R}}$ un groupe semi-simple sans facteurs compacts, K_∞ un sous-groupe compact maximal de $G(\mathbb{R})$ et $X = G(\mathbb{R})/K_\infty$ l'espace symétrique de type non compact associé. Un sous-groupe arithmétique Γ de X est un sous-groupe arithmétique du groupe des points rationnels $H(\mathbb{Q})$ d'un groupe algébrique réductif $H_{\mathbb{Q}}$ tel que $H(\mathbb{R})/Z(H)(\mathbb{R})K_H \simeq X$ où K_H désigne un sous-groupe compact maximal de $H(\mathbb{R})$ et $Z(H)$ désigne le centre de $H_{\mathbb{Q}}$. Dans cette situation Γ agit proprement sur X.

Remarque 4.2 *Noter que dans cette dernière définition, le groupe $H_{\mathbb{R}}$ peut avoir des facteurs compacts. On peut sans perte de généralité supposer que $H_{\mathbb{Q}}$ n'a pas de facteur simple H_1 sur $\mathbb{Q}$ tel que $H_1(\mathbb{R})$ soit compact. Pour construire les résaux arithmétiques du demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}$, on part d'une algèbre de quaternion B sur un corps totalement réel F telle que B est déployèe en une unique place archimédienne de F. Soit B^{*1} le groupe algébrique sur $\mathbb{Q}$ des unités de B de norme 1. Un réseau arithmétique de B^{*1} est un réseau arithmétique de $\mathbb{H}$ et tout réseau arithmétique de $\mathbb{H}$ s'obtient à partir d'un groupe $H_{\mathbb{Q}}$ ayant même groupe adjoint que B^{*1} pour une certaine algèbre de quaternion B du type précédent sur un corps de nombres totalement réel.*

Definition 4.3 *Soit $G_{\mathbb{R}}$ un groupe algébrique linéaire. Un sous-groupe discret $\Gamma \subset G(\mathbb{R})$ est un réseau de $G(\mathbb{R})$ si la mesure de $\Gamma\backslash G(\mathbb{R})$ est fini pour une mesure $G(\mathbb{R})$-invariante sur $G(\mathbb{R})$. On note alors μ_G la mesure de probabilité $G(\mathbb{R})$-invariante sur $\Gamma\backslash G(\mathbb{R})$. Si $G_{\mathbb{R}} \simeq G_{1,\mathbb{R}}G_{2,\mathbb{R}}$ pour des sous-groupes* *normaux G_i de G tels que $G_i(\mathbb{R})$ n'est pas compact et si Γ est commensurable à $\Gamma_1\Gamma_2$ pour des réseaux Γ_i de $G_i(\mathbb{R})$, on dit que Γ est réductible. Un réseau de $G_\mathbb{R}$ qui ne peut pas se décomposer sous cette forme est dit irréductible. Soit $G_\mathbb{Q}$ un groupe semi-simple, un réseau arithmétique $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$ de $G(\mathbb{R})$ est irréductible si et seulement si $G_\mathbb{Q}$ est $\mathbb{Q}$-simple.*

Les énoncés suivants sont dus à Borel [10].

Théorème 4.4 *Soit $G_\mathbb{Q}$ un groupe algébrique linéaire. Soit Γ un sous-groupe arithmétique de $G(\mathbb{Q})$, alors Γ est un réseau de $G(\mathbb{R})$ si et seulement si $X^*(G_\mathbb{Q}) = \{1\}$. Dans cette situation Γ est Zariski-dense dans $G_\mathbb{R}$.*

Un groupe algébrique linéaire $G_\mathbb{Q}$ tel que $X^*(G_\mathbb{Q}) = \{1\}$ sera dit de type $\mathcal{F}$. Il revient au même de dire que le centre de $G_\mathbb{Q}$ ne contient pas un tore déployé.

Théorème 4.5 *Soit $G_\mathbb{Q}$ un groupe algébrique de type $\mathcal{F}$ et Γ un réseau arithmétique de $G(\mathbb{Q})$. Alors $\Gamma\backslash G(\mathbb{R})$ est compact si et seulement si $G_\mathbb{Q}$ est $\mathbb{Q}$-anisotrope. Soit R_u le radical unipotent de $G_\mathbb{Q}$. Alors $G_\mathbb{Q}$ est anisotrope si et seulement si $X^*(G_\mathbb{Q}) = 1$ et si tout élément unipotent u de $G(\mathbb{Q})$ est dans $R_u(\mathbb{Q})$. Il revient au même de dire que $G_\mathbb{Q}$ ne contient pas de tores déployés.*

Proposition 4.6 *Si $\alpha : G_\mathbb{Q} \to G'_\mathbb{Q}$ est un $\mathbb{Q}$-morphisme dominant et $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$ un sous-groupe arithmétique, alors $\alpha(\Gamma)$ est un sous-groupe arithmétique de $G'(\mathbb{Q})$.*

4.2 Opérateurs de Hecke.

On suppose dans cette partie que $G_\mathbb{Q}$ est un $\mathbb{Q}$-groupe agébrique semi-simple sans $\mathbb{Q}$-facteurs simples G_i tels que $G_i(\mathbb{R})$ soit compact. On fixe un réseau arithmétique $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$. On définit le commensurateur Comm(Γ) de Γ dans $G(\mathbb{R})$ par

$$\mathrm{Comm}(\Gamma) = \{g \in G(\mathbb{R}), \Gamma \text{ et } g^{-1}\Gamma g \text{ sont commensurables } \}.$$

Comme Γ est arithmétique, Comm(Γ) contient $G(\mathbb{Q})$ et en particulier Γ est d'indice infini dans Comm(Γ). Ceci caractérise les réseaux arithmétiques de $G(\mathbb{R})$ car d'après un résultat de Margulis ([33], Ch. IX, thm. 6.5), un réseau irréductible Λ de $G(\mathbb{R})$ est arithmétique si et seulement si Λ est d'indice infini dans Comm(Λ).

Pour tout $a \in \mathrm{Comm}(\Gamma)$ on a une décomposition finie

$$\Gamma a \Gamma = \coprod_{i=1}^{\deg(a)} \Gamma a_i \tag{16}$$

où

$$\deg(a) = |\Gamma \backslash \Gamma a \Gamma| = [\Gamma : \Gamma \cap a^{-1} \Gamma a].$$

Plus précisément si $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{\deg(a)}\}$ désigne un système de représentants dans Γ de $\Gamma \cap a^{-1}\Gamma a \backslash \Gamma$ alors

$$\Gamma a \Gamma = \coprod_{i=1}^{\deg(a)} \Gamma a \alpha_i \tag{17}$$

La correspondance de Hecke T_a associe à tout $\Gamma x \in \Gamma \backslash G(\mathbb{R})$ l'ensemble fini

$$T_a.x := \{\Gamma a_i x,\ 1 \leq i \leq \deg(a)\}.$$

On vérifie que T_a est indépendant des choix dans la décomposition de l'équation (16) et ne dépend que de la double classe $\Gamma a \Gamma$.

4.3 Préliminaires ergodiques.

Soit X un espace métrique localement compact. On note $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des mesures de Borel de probabilité sur X. Soit $C_b(X)$ l'ensemble des fonctions continues bornées sur X. On dit qu'une suite $\mu_n \in \mathcal{P}(X)$ converge faiblement vers $\mu \in \mathcal{P}(X)$ si pour tout $f \in C_b(X)$

$$\mu_n(f) = \int_X f \mu_n \to \mu(f) = \int_X f.\mu \quad \text{quand } n \to \infty.$$

On écrira dans cette situation $\mu_n \xrightarrow{cf} \mu$ (ou simplement $\mu_n \to \mu$).

On définit la topologie faible* sur $\mathcal{P}(X)$ comme la plus petite topologie telle que pour tout $f \in C_b(X)$, les applications $\mu \to \mu(f) = \int_X f d\mu$ soient continues.

Proposition 4.7 *Si X est un espace métrique compact, alors μ_n converge faiblement vers $\mu \in \mathcal{P}(X)$ si et seulement si μ_n converge vers μ pour la topologie faible*. L'espace $\mathcal{P}(X)$ est métrisable et compact pour la topologie faible* : si μ_n est une suite de $\mathcal{P}(X)$, il existe une sous-suite faiblement convergente.*

Soit X un espace localement compact muni d'une action d'un groupe localement compact H non compact. L'ensemble des mesures de probabilité de Borel qui sont H-invariantes forment un ensemble convexe.

Definition 4.8 *Une mesure de probabilité $\mu \in \mathcal{P}(X)$, H-invariante est dite* **ergodique** *si une des conditions suivantes est vérifiée.*

(a) Tout sous-ensemble $A \subset X$, mesurable et H-invariant vérifie $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = 1$.

(b)Toute fonction mesurable f sur X, constante sur les orbites de H dans X est constante μ-presque partout. (i.e si pour presque tout $x \in X$ (pour la mesure μ) et tout $h \in H$, $f(h.x) = f(x)$ alors f est constante μ-presque partout)

(c) La mesure μ est un point du bord de l'ensemble convexe des mesures de probabilité de Borel qui sont H-invariantes.

On dit aussi que l'action de H est μ-mélangeante si pour toute suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de H tel que $h_n \to \infty$ (i.e. telle que pour tout compact $K \subset X$, $\{n \in \mathbb{N}, h_n \in K\}$ est fini) et pour tout sous-ensemble mesurable E, F de X

$$\mu(A \cap h_n B) \to \mu(A)\mu(B).$$

Une action μ-mélangeante est ergodique pour μ.

Il est classique que toute mesure H-invariante sur X est une moyenne de mesures H-invariantes ergodiques. Le théorème suivant dit de décomposition ergodique permet en général de ramener l'étude des mesures H-invariantes sur X à celles qui sont ergodiques.

Théorème 4.9 *Il existe un espace Z tel que pour toute mesure H-invariante μ sur X il existe une mesure ν sur Z et une famille mesurable $\{\mu_z\}_{z\in Z}$ de mesure H-invariantes ergodiques sur X tels que $\mu = \int_Z \mu_z d\nu$. Par définition pour toute fonction $f \in L^1(X, \mu)$, $\int_X f \, d\mu = \int_Z \int_X f \, d\mu_z \, d\nu(z)$.*

L'espace Z est l'ensemble des points extrémaux de l'espace convexe des mesures H-invariantes. De plus deux mesures H-invariantes ergodiques distinctes μ_1 et μ_2 sur X sont mutuellement singulières : Il existe un sous-ensemble Ω de X tel que $\mu_1(\Omega) = 1$ et tel que $\mu_2(\Omega) = 0$.

4.4 Théorie ergodique sur les espaces homogènes $\Gamma\backslash G$.

Soit G un groupe de Lie. Un réseau Γ de G est un sous-groupe discret de G de covolume fini pour la mesure G-invariante. Le réseau est dit uniforme si $\Omega = \Gamma\backslash G$ est cocompact. Dans cette situation tout sous-groupe de Lie F de G agit (à droite) sur $\Gamma\backslash G$ et le but de la théorie ergodique dans cette situation est de comprendre les orbites de F et de classifier les mesures F-invariantes. Une orbite ΓxF est dite périodique si il existe une mesure de probabilité $\mu \in \mathcal{P}(\Omega)$, F-invariante de support ΓxF. Noter que les orbites périodiques de F sont fermés dans Ω (Raghunathan thm. 1.13 [48]).

Une classe naturelle de mesures de probabilité H-invariantes sur Ω est donnée par les mesures de probabilité L-invariantes sur une orbite ΓxL, périodique pour un sous-groupe de Lie L de G contenant F. Une telle mesure sera dite **homogène** ou **algébrique**. Une mesure μ sur Ω est donc homogène ou algébrique si son support $Supp(\mu)$ est une orbite fermée de son sous-groupe d'invariance $\Lambda(\mu)$.

Pour un sous-groupe de Lie F arbitraire de G la détermination des mesures F-invariantes ergodiques ou celle des orbites fermées de F sont des problèmes non résolus. Dans les applications que nous avons en vue, $G = G(\mathbb{R})^+$ pour un groupe algébrique $G_{\mathbb{Q}}$ semi-simple sans $\mathbb{Q}$-facteurs simples G_i avec $G_i(\mathbb{R})$ compact, Γ est un réseau arithmétique de $G(\mathbb{Q})$. Toutes ces hypothèses seront en vigueur à partir de maintenant. Le cas où $F = T(\mathbb{R})$ pour un tore déployé maximal est l'un des plus intéressants et des progrès notables ont étés obtenus par Lindentrauss et Einsiedler dans les années récentes.

Quand F est engendré par des unipotents la théorie est essentiellement complète grâce aux travaux de Ratner que nous décrivons maintenant.

Les deux énoncés suivants sont fondamentaux et sont dus à Ratner. Le premier est le théorème dit de classification des mesures [49]. Le second est un énoncé topologique qui classifie les adhérences d'orbites de F.

Théorème 4.10 *Soit F un sous-groupe fermé connexe de G engendré par ses sous-groupes unipotents à un paramètre. Alors toute mesure de probabilité F-invariante et ergodique pour l'action de F est homogène.*

Théorème 4.11 *Soit F un sous-groupe fermé connexe de G engendré par ses sous-groupes unipotents à un paramètre. Pour tout $x \in \Gamma\backslash G$ on note $\overline{xF}$ l'adhérence de xF. Il existe un sous-groupe fermé connexe F' de G contenant F tel que $\overline{xF}$ est une orbite périodique xF' de F'.*

Nous aurons besoin de préciser ces résultats en suivant le formalisme de Mozes-Shah [42]). Certains des énoncés qui suivent utilisent que Γ est un réseau arithmétique de $G(\mathbb{Q})$.

Definition 4.12 *Un groupe algébrique connexe H sur $\mathbb{Q}$ est dit de type $\mathcal{H}$ si son radical résoluble est unipotent et si $H_s = H/R_u(H)$ est produit presque direct de groupes $\mathbb{Q}$-simples H_i tels que $H_i(\mathbb{R})$ est non compact.*

Soit $F \subset G(\mathbb{R})^+$ un sous-groupe de Lie fermé connexe. Nous dirons que F est de type $\mathcal{K}$ (de type $\mathcal{H}$ dans [42]) si :

3.1) $F \cap \Gamma$ est un réseau de F.

En particulier $F \cap \Gamma \backslash F$ est fermé dans $\Gamma \backslash G(\mathbb{R})^+$; soit μ_F sa mesure invariante normalisée.

3.2) Le sous-groupe $L(F)$ engendré par les sous-groupes unipotents à un paramètre de G contenus dans F opère ergodiquement sur $F \cap \Gamma \backslash F$ par rapport à μ_F.

On note $\mathcal{Q}_{\mathcal{K}}(\Omega)$ le sous-ensemble de $\mathcal{P}(\Omega)$ formé des mesures telles que le sous-groupe $L(\Lambda(\mu))$ agit ergodiquement par rapport à μ. On note aussi $\mathcal{Q}_{\mathcal{K},e}(\Omega)$ le sous-ensemble de $\mathcal{Q}_{\mathcal{K}}(\Omega)$ formé des mesures dont le support contient $\Gamma e \in \Omega$. Il résulte des définitions que si F est de type $\mathcal{K}$ alors $\mu_F \in \mathcal{Q}_{\mathcal{K},e}(\Omega)$.

Théorème 4.13 *(Mozes-Shah)*

i) $\mu \in \mathcal{Q}_{\mathcal{K},e}(\Omega)$ si et seulement si $\mu = \mu_F$ pour un $F \in \mathcal{K}$.

ii) $\mathcal{Q}_{\mathcal{K},e}(\Omega)$ est compact pour la topologie faible.

iii) Si $\mu_n \in \mathcal{Q}_{\mathcal{K},e}(\Omega)$ converge vers $\mu \in \mathcal{Q}_{\mathcal{K},e}(\Omega)$ alors

$$Supp(\mu_n) \subset Supp(\mu)$$

pour $n \gg 0$.

Explicitons le lien entre les $\mathbb{Q}$-sous-groupes algébriques de $G(\mathbb{Q})$ de type $\mathcal{H}$ et les sous-groupes de Lie de $G = G(\mathbb{R})^+$ de type $\mathcal{K}$.

Soit F un sous-groupe de Lie de G. On notera comme précédemment $L(F)$ le sous-groupe de F engendré par les sous-groupes unipotents à un paramètre. Pour $H_{\mathbb{Q}}$ dans la classe $\mathcal{H}$ et $H = H(\mathbb{R})^+$ on a :

$$L(H) = R_u(H)(\mathbb{R}) \prod_i H_i(\mathbb{R})^+ = NL(H_s)$$

où le produit porte sur les composantes $\mathbb{R}$-simples H_i de $H_{\mathbb{R}}$ qui ne sont pas compacts. (Les produits sont presque directs).

Le résultat suivant est montré dans [13] à partir de résultats antérieurs de Shah [55].

Lemme 4.14 *Soit $F \subset G(\mathbb{R})^+$ un sous-groupe de type $\mathcal{K}$. Alors $F = H(\mathbb{R})^+$ pour un $\mathbb{Q}$-sous-groupe $H_{\mathbb{Q}}$ de G de type $\mathcal{H}$. De plus si $L = L(F)$*

(a) $\overline{\Gamma\backslash\Gamma L} = \Gamma\backslash\Gamma F$ dans $G(\mathbb{R})^+$.

(b) F est l'unique sous-groupe fermé de G tel que $\overline{\Gamma\backslash\Gamma L} = \Gamma\backslash\Gamma F$.

(c) Le groupe $H_{\mathbb{Q}}$ est le groupe de Mumford-Tate de L (i.e. le plus petit $\mathbb{Q}$-sous-groupe algébrique M de G tel que $L \subset M(\mathbb{R})^+$).

Le groupe L est invariant dans F et ergodique sur $\Gamma\backslash\Gamma F$. Il a donc une orbite dense. Il existe donc $g \in F$ tel que

$$\Gamma\backslash\Gamma F = \overline{\Gamma\backslash\Gamma gL} = \overline{\Gamma\backslash\Gamma Lg},$$

d'où (a).

D'après Shah ([55], Prop.3.2), l'égalité (a) implique que $F = H(\mathbb{R})^+$, d'où les autres assertions.

Le lemme suivant voisin de résultats de Shah [55] est tiré du lemme 2.3 de [12] et et du lemme 3.1 d [13].

Lemme 4.15 *Soit $H_{\mathbb{Q}}$ un groupe de type $\mathcal{F}$. Alors $H_{\mathbb{Q}}$ est de type $\mathcal{H}$ si et seulement si $L(H)$ opère ergodiquement sur $\Gamma\backslash H(\mathbb{R})^+$ par rapport à μ_H. En particulier si $H_{\mathbb{Q}}$ est de type $\mathcal{H}$, alors $H = H(\mathbb{R})^+$ est de type $\mathcal{K}$.*

Montrons tout d'abord qu'un groupe vérifiant l'hypothèse ergodique du lemme est de type $\mathcal{H}$. Soit en effet $H_{\mathbb{Q}}$ un groupe de type $\mathcal{F}$, donc :

$$H_{\mathbb{Q}} = N \rtimes (T.H_s)$$

où N est unipotent, T est un tore (anisotrope), H_s est semi-simple et le produit $T.H_s$ est quasi-direct. Alors $L(H) = N(\mathbb{R}) \rtimes L(H_s)$. On a un morphisme dominant

$$\pi : \ H \longrightarrow T'$$

pour un tore T' isogène à T. Comme $\Gamma \subset H(\mathbb{R})^+$ est un sous-groupe arithmétique, $\pi(\Gamma) = \Gamma_{T'}$ est discret dans $T'(\mathbb{R})^+$. Les orbites de $L(H)$ s'envoient sur des points de $\Gamma_{T'}\backslash T'(\mathbb{R})^+$. Par hypothèse, il existe une orbite sous $L(H)$ qui est dense dans $\Gamma\backslash H(\mathbb{R})^+$. Comme π est dominant on en déduit que T' (et par suite T) est trivial.

Si H_s a un facteur H_i $\mathbb{Q}$-simple qui est $\mathbb{R}$-anisotrope, alors on a de même un morphisme surjectf

$$\Gamma\backslash H(\mathbb{R})^+ \longrightarrow \Gamma_i\backslash H_i'(\mathbb{R})^+$$

avec H_i' isogène à H_i, l'action de $L(H)$ à droite étant triviale. L'image Γ_i de Γ est contenue dans un sous-groupe arithmétique ([10], cor. 7.3) donc est finie. Ceci contredit l'ergodicité.

Pour l'implication inverse, supposons H de type $\mathcal{H}$. Si H est semi-simple le lemme (4.15) est vérifié dans ([12], Lemme 2.3).

En général $H = N \rtimes H_s$ et tout sous-groupe aritmétique de $H(\mathbb{R})^+$ contient un sous-groupe d'indice fini de la forme $\Gamma_N \rtimes \Gamma_s$ ([10] cor. 7.13). Comme les revêtements finis ne changent pas les propriétés ergodiques, on est ramené à verifier que le produit semi-direct $N.L(H_s)$ opère ergodiquement sur $\Gamma_N\backslash N \times \Gamma_s\backslash H_s$. La démonstration facile de ce fait est laissée au lecteur.

On peut réécrire le théorème de Mozes-Shah dans le contexte arithmétique en tenant compte de la relation entre classe $\mathcal{H}$ et classe $\mathcal{K}$. Soit $H_{\mathbb{Q}}$ un sous-groupe algébrique de $G_{\mathbb{Q}}$ de type $\mathcal{H}$ on note μ_H la mesure associée sur Ω de support $\Gamma\backslash\Gamma H(\mathbb{R})^+ \simeq \Gamma \cap H(\mathbb{R})^+\backslash H(\mathbb{R})^+$.

Théorème 4.16 *Soit $G_{\mathbb{Q}}$ un groupe semi-simple de type $\mathcal{H}$ et soit $H_n \subset G$ une suite stricte de $\mathbb{Q}$–sous-groupes algébriques de $G_{\mathbb{Q}}$ de de types $\mathcal{H}$ et $\mu_n = \mu_{H_n}$ la suite de mesures sur Ω associée. Il existe un $\mathbb{Q}$-sous groupe algébrique $H_{\mathbb{Q}}$ de $G_{\mathbb{Q}}$ de type $\mathcal{H}$ et une sous-suite H_{n_k} de H_n tels que μ_{n_k} converge faiblement vers la mesure μ_H. De plus pour $H_{n_k} \subset H_{\mathbb{Q}}$ pour tout k.*

Preuve. L'existence de la sous-suite H_{n_k} et de $H_{\mathbb{Q}}$ dans $\mathcal{H}$ tels que μ_{n_k} converge faiblement vers μ_H résulte du théorème de Mozes-Shah et du lien entre classe $\mathcal{H}$ et classe $\mathcal{K}$. On sait aussi que l'on peut supposer que pour tout k, $Supp(\mu_{n_k}) \subset \mathrm{supp}(\mu)$. On en déduit que $Lie(H_{n_k}(\mathbb{R})) \subset Lie(H(\mathbb{R}))$, donc $H_n(\mathbb{R})^+ \subset H(\mathbb{R})^+$. Puisque $H_n(\mathbb{Q})^+$ est Zariski–dense dans H_n, ceci implique que $H_{n_k} \subset H_{\mathbb{Q}}$, d'où la dernière assertion du théorème.

5 Equidistribution des sous-variétés spéciales des variétés de Shimura.

Soit (G, X) une donnée de Shimura. On suppose (sans perte de généralités) que G est semi-simple de type adjoint. Soit K un sous-groupe compact ouvert de $G(\mathbb{A}_f)$. On fixe une composante connexe X^+ de X. Soit $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ un sous-groupe compact ouvert.

On note $\Gamma := G(\mathbb{Q})^+ \cap K$ et $S = \Gamma \backslash X^+$ qui est une composante irréductible de la variété de Shimura $\mathrm{Sh}_K(G, X)$.

Soit V une sous-variété spéciale de S. Il existe alors une sous-donnée de Shimura (H, X_H) de (G, X) telle que V est l'image de $X_H^+ \times \{1\}$ dans S pour une composante X_H^+ de X_H. D'après le lemme 3.34, on peut supposer que $H_\mathbb{Q}$ est le groupe de Mumford-Tate générique de X_H. On fera toujours ce choix dans la suite de sorte que V détermine $H_\mathbb{Q}$ à conjugaison par un élément $\gamma \in \Gamma$ près.

On peut munir V d'une mesure de probabilité canonique μ_V. Pour tout $x \in X^+$ on dispose d'une application

$$\pi_x : \Gamma \backslash G(\mathbb{R})^+ \longrightarrow S = \Gamma \backslash X^+$$

$$\Gamma g \mapsto \Gamma g.x.$$

Comme G est adjoint, le groupe $H_\mathbb{Q}$ est de type $\mathcal{F}$. Il suffit en effet de vérifier que le centre connexe T de H est un tore $\mathbb{Q}$-anisotrope. On montre le fait plus fort que $T_\mathbb{R}$ est $\mathbb{R}$-anisotrope autrement dit que $T(\mathbb{R})$ est compact. Soit en effet $x_H : \mathbb{S} \to H_\mathbb{R} \subset G_\mathbb{R}$ un élément de X_H. Alors $T(\mathbb{R})$ est contenu dans le centralisateur dans $G(\mathbb{R})$ de $x_H(\sqrt{-1})$. Comme ce centralisateur est un compact maximal de $G(\mathbb{R})$ (car G est adjoint) on en déduit bien que $T(\mathbb{R})$ est compact.

D'après le résultat de Borel (théorème 4.4), $\Gamma_H := H(\mathbb{R})^+ \cap \Gamma$ est un réseau arithmétique de $H(\mathbb{Q})$. Par définition il existe une mesure de probablité $H(\mathbb{R})^+$-invariante μ_H sur

$$\Gamma_H \backslash H(\mathbb{R})^+ \simeq \Gamma \backslash \Gamma H(\mathbb{R})^+ \subset \Gamma \backslash G(\mathbb{R})^+.$$

Pour tout $x_H \in X_H^+$ on a $V = \pi_{x_H}(\Gamma_H \backslash H(\mathbb{R})^+)$ et la mesure de probabilité $\mu_V = (\pi_{x_H})_* \mu_H$ est indépendante du choix de $x_H \in X_H^+$. On dira que μ_V est la mesure canonique de V. Si $\mathcal{P}(S)$ désigne l'ensemble des mesures de probabilité de Borel sur S alors $\mu_V \in \mathcal{P}(S)$ et $Supp(\mu_V) = V$. Si H est un tore, alors V est un point spécial et μ_V une mesure de Dirac de support V.

On cherche à étudier pour une suite V_n de sous-variétés spéciales de S la convergence faible de la suite de mesures $\mu_n = \mu_{V_n}$ associée. On ne peut espérer un résultat général car les points spéciaux de S sont denses dans S et la suite de mesures associées à une suite de points spéciaux de S peut avoir un comportement arbitraire. On dira qu'une sous-variété spéciale V de S est fortement spéciale si le sous-groupe $H_{\mathbb{Q}}$ de $G_{\mathbb{Q}}$ est semi-simple. Notons que $H_{\mathbb{Q}}$ n'est déterminé par V qu'à conjugaison près dans Γ mais que la notion d'être fortement spéciale ne dépend pas de ce choix.

Le résultat principal que nous avons en vue est dû à Clozel et à l'auteur de ces notes [12].

Théorème 5.1 *Soit V_n une suite de sous-variétés fortement spéciales de S. Soit μ_n la mesure de probabilité associée à V_n. Il existe une sous-variété fortement spéciale V et une sous-suite μ_{n_k} qui converge faiblement vers μ_V. De plus V contient V_{n_k} pour tout k.*

Une conséquence formelle dans l'esprit de la conjecture d'André-Oort est le résultat suivant.

Corollaire 5.2 *Soit Y une sous-variété d'une variété de Shimura S. Il existe un ensemble fini $\{V_1, \ldots, V_k\}$ de sous-variétés fortement spéciales de dimension positive $V_i \subset Y$ tel que si V est une sous-variété fortement spéciale de dimension positive avec $V \subset Y$ alors $V \subset V_i$ pour un certain $i \in \{1, \ldots, k\}$.*

On montre le corollaire de la manière suivante. Soit V_n une suite de sous-variétés fortement spéciales maximales parmi les sous-variétés fortement spéciales contenues dans Y. En passant à une sous-suite on peut supposer d'après le théorème 5.1 que μ_n converge faiblement vers μ_V pour une variété fortement spéciale V. Comme Y est un fermé, le support de μ_V est contenu dans Y. On en déduit que $V \subset Y$. Par la maximalité des V_n et le fait que $V_n \subset V$ pour tout n assez grand, on en déduit que la suite V_n est stationaire.

Remarque 5.3 *Soit V une sous-variété fortement spéciale de S et $H_{\mathbb{Q}}$ le sous-groupe algébrique de $G_{\mathbb{Q}}$ associé. Alors $H_{\mathbb{Q}}$ est de type $\mathcal{H}$ et $H(\mathbb{R})^+$ et de type $\mathcal{K}$. En effet $H_{\mathbb{Q}}$ est semi-simple par hypothèse et par la condition (D3) de Deligne les facteurs $\mathbb{Q}$-simples de $H_{\mathbb{Q}}$ ne sont pas compacts.*

Preuve du théorème 5.1.

Soit $\Omega := \Gamma\backslash G(\mathbb{R})^+$. Soit V_n une suite de sous-variétés fortement spéciales de S. On suppose que V_n est l'image de $X^+_{\mathrm{H}_n} \times \{1\}$ pour une sous-donnée de Shimura (H_n, X_{H_n}) de (G, X) telle que H_n est semi-simple et est le groupe de Mumford-Tate générique de X_{H_n}.

Soit $\nu_n = \mu_{H_n}$ la mesure de probabilité, de $\mathcal{P}(\Omega)$, $H_n(\mathbb{R})^+$-invariante, de support $\Sigma_n := \Gamma \cap H_n(\mathbb{R})^+\backslash H_n(\mathbb{R})^+ \simeq \Gamma\backslash\Gamma H_n(\mathbb{R})^+$. Au vu de la remarque précédente et de la version des résultats de Mozes-Shah donnée au théorème 4.16, on peut en passant au besoin à une sous-suite trouver un $\mathbb{Q}$-sous-groupe algébrique $H_\mathbb{Q}$ de $G_\mathbb{Q}$ de type $\mathcal{H}$ tel que ν_n converge faiblement vers ν_H. De plus $H_n \subset H_\mathbb{Q}$.

Soit $x \in X$ se factorisant par $H_\mathbb{R}$. On peut pour construire un tel x choisir n arbitrairement et prendre n'importe quel élément x de X_{H_n} car par définition x se factorise par $H_{n,\mathbb{R}} \subset H_\mathbb{R}$. D'après la proposition 3.28, $H_\mathbb{Q}$ est réductif. Comme $H_\mathbb{Q}$ est de type $\mathcal{H}$, il est en fait semi-simple et ses $\mathbb{Q}$-facteurs simples ne sont pas $\mathbb{R}$-anisotropes. Soit X_H la $H(\mathbb{R})$-classe de conjugaison de x. D'après la proposition 3.28, (H, X_H) est une sous-donnée de Shimura et l'image V de $X^+_H \times \{1\}$ dans S est une sous-variété fortement spéciale de S.

Pour en déduire un résultat sur la suite V_n de S on doit choisir pour tout n un $x_n \in X^+_{H_n}$ de sorte que $V_n = \pi_{x_n}(\Sigma_n)$ et $\mu_n = (\pi_{x_n})_*\nu_n$.

Si on peut faire un choix de x_n tel que la suite x_n converge vers $x_\infty \in X_H$, un argument simple d'analyse prouve que μ_n converge simplement vers $\mu_V = (\pi_{x_\infty})_*\nu_H$.

Si S est compact (i.e. si $G_\mathbb{Q}$ est $\mathbb{Q}$-anistrope) alors on procède de la manière suivante : En changeant au besoin (H_n, X_{H_n}) en $(\gamma_n H_n \gamma_n^{-1}, X_{\gamma_n H_n \gamma_n^{-1}})$ pour un γ_n dans Γ, on peut choisir x_n dans un domaine fondamental fixe de X^+ pour l'action de Γ. Comme ce domaine fondamental est compact, on peut en passant à une sous-suite supposer que x_n converge vers $x_\infty \in X_H$.

Quand S n'est pas compact on utilise le résultat suivant de Dani et Margulis ([15] théorème 2).

Proposition 5.4 *Il existe un ensemble compact C de $\Gamma\backslash G(\mathbb{R})^+$ tel que pour tout sous-groupe unipotent à un paramètre $W = (u_t)_{t\in\mathbb{R}}$ et tout $g \in G(\mathbb{R})^+$, si*

$$\Gamma\backslash\Gamma g W \cap C = \emptyset$$

alors il existe un $\mathbb{Q}$-sous-groupe parabolique propre P de $G_\mathbb{Q}$ tel que

$$gWg^{-1} \subset P(\mathbb{R}).$$

On en déduit tout d'abord :

Lemme 5.5 *Soient $F_{\mathbb{Q}}$ un $\mathbb{Q}$-sous-groupe semi-simple de type $\mathcal{H}$ (i.e tel que $F(\mathbb{R})^+ \in \mathcal{K}$) et $g \in G(\mathbb{Q})^+$ tels que*

$$\Gamma \backslash \Gamma g F(\mathbb{R})^+ \cap C = \emptyset.$$

Il existe alors un $\mathbb{Q}$-sous-groupe parabolique propre P de $G_{\mathbb{Q}}$ tel que $F_{\mathbb{Q}} \subset P$.

Preuve. Soit $L = L(F)$ le sous-groupe de $F(\mathbb{R})^+$ engendré par les sous-groupes unipotents à un paramètre de $G(\mathbb{R})^+$ qui sont contenus dans $F(\mathbb{R})^+$. On sait alors que $F_{\mathbb{Q}}$ est le groupe de Mumford-Tate de L d'après le lemme 4.14). Fixons un sous-groupe à un paramètre

$$W = (u_t)_{t \in \mathbb{R}} \subset L$$

tel que W n'est contenu dans aucun sous-groupe normal de $L(F)$.

Pour tout $h \in F(\mathbb{R})^+$

$$\Gamma \backslash \Gamma g h W \cap C \subset \Gamma \backslash \Gamma g F(\mathbb{R})^+ \cap C = \emptyset$$

D'après la proposition 5.4, pour tout $h \in F(\mathbb{R})^+$, il existe un $\mathbb{Q}$-parabolique propre P_h tel que

$$g h W h^{-1} g^{-1} \subset P_h(\mathbb{R}).$$

Comme l'ensemble des paraboliques sur $\mathbb{Q}$ est dénombrable, il existe un $\mathbb{Q}$-parabolique propre P_0 et un ensemble $A \subset F(\mathbb{R})^+$ de mesure positive (pour la mesure de Haar sur $F(\mathbb{R})^+$) tels que pour tout $h \in A$:

$$g h W h^{-1} g^{-1} \subset P_0(\mathbb{R}).$$

Comme l'ensemble des $h \in F(\mathbb{R})^+$ tels que $ghWh^{-1}g^{-1} \subset P_0(\mathbb{R})$ est un sous-ensemble de Zariski de $F(\mathbb{R})^+$ de mesure positive, par connexité de $F(\mathbb{R})^+$ on en déduit que pour tout $h \in F(\mathbb{R})^+$

$$g h W h^{-1} g^{-1} \subset P_{0\mathbb{R}}.$$

Comme W n'est contenu dans aucun sous-groupe normal de L on en déduit que

$$g L g^{-1} \subset P_{0\mathbb{R}}.$$

Soit $P = g^{-1} P_0 g$, on a $L \subset P_{\mathbb{R}}$ donc

$$F_{\mathbb{Q}} = MT(L) \subset P.$$

Ceci termine la preuve du lemme car P est un $\mathbb{Q}$-parabolique propre.

Lemme 5.6 *Il existe un compact C' de $\Gamma\backslash X^+$ tel que si Z est une sous-variété fortement spéciale de S alors*

$$Z \cap C' \neq \emptyset. \tag{18}$$

Preuve. Soit Ω un compact de $G(\mathbb{R})^+$ contenant l'origine e comme point intérieur. On note

$$C_1 = C.\Omega = \{c\omega, c \in C, \omega \in \Omega\},$$

c'est encore un compact de $\Gamma\backslash G(\mathbb{R})^+$. Pour tout $x \in X^+$, on note comme précédemment π_x l'application associée de $\Gamma\backslash G(\mathbb{R})^+$ vers $\Gamma\backslash X^+$. On fixe $x_0 \in X^+$ et on note $C' = \pi_{x_0}(C_1)$. On remarque que pour tout $\omega \in \Omega$, si on note $x_\omega = \omega.x_0$ alors

$$\pi_{x_\omega}(C) \subset C'.$$

Soit Z un sous-variété fortement spéciale de S. Il existe donc une sous-donnée de Shimura (F, X_F) de (G, X) avec $F_{\mathbb{Q}}$ semi simple telle que Z soit l'image de $X_F^+ \times \{1\}$ dans S.

Soit $x \in X_F^+$ de sorte que $X_F^+ = F(\mathbb{R})^+.x$. Comme $G(\mathbb{Q})^+$ est dense dans $G(\mathbb{R})^+$, il existe $\omega \in \Omega$ et $\gamma \in G(\mathbb{Q})^+$ tels que $x = \gamma\omega.x_0$. Soit $F_{\gamma\mathbb{Q}} = \gamma^{-1}F_{\mathbb{Q}}\gamma$. On a alors $X_F^+ = F(\mathbb{R})^+\gamma.x_\omega$ et

$$Z = \pi_{x_\omega}(\Gamma\backslash\Gamma\gamma F_\gamma(\mathbb{R})^+).$$

Si $Z \cap C' = \emptyset$ alors à fortiori $Z \cap \pi_{x_\omega}(C) = \emptyset$ et finalement

$$\Gamma\backslash\Gamma\gamma F_\gamma(\mathbb{R})_+ \cap C = \emptyset.$$

Par le lemme 5.5, on en déduit que $F_{\gamma\mathbb{Q}} \subset P$ pour un $\mathbb{Q}$-sous-groupe parabolique propre P.

Ceci est en fait impossible par définition des sous-variétés fortement spéciales. En effet soit $x_F \in X_F$, alors le centralisateur $Z_{G_{\mathbb{R}}}(F_{\mathbb{R}})$ est contenu dans $Z_{G_{\mathbb{R}}}(x_F(\sqrt{-1}))$ qui est un compact maximall de $G(\mathbb{R})$ (on rappelle que G est adjoint). On en déduit à fortiori que $Z_{G_{\mathbb{Q}}}(F_{\mathbb{Q}})$ est $\mathbb{Q}$-anisotrope. D'après le lemme 3.29, $F_{\mathbb{Q}}$ n'est pas contenu dans un sous-groupe parabolique propre.

A l'aide du lemme 5.6, on peut finir la preuve du théorème 5.1 comme dans le cas S compact. On fixe en effet un domaine fondamental $\mathcal{F}$ de X^+ pour l'action de Γ. On peut supposer comme dans le cas S compact que le point $x_n \in X_{H_n}$ est dans $\mathcal{F}$ pour tout n. Le lemme 5.6 assure en fait que l'on peut choisir en fait $x_n \in X_{H_n}$ dans un compact de $\mathcal{F}$.

Des généralisations du théorème 5.1 sont données dans [59] et dans [61]. Décrivons brièvement ce dernier résultat qui joue un rôle dans la preuve de la conjecture d'André-Oort sous l'hypothèse de Riemann généralisée.

Definition 5.7 *Soit (G, X) une donnée de Shimura avec $G_{\mathbb{Q}}$ de type adjoint. Soit T un $\mathbb{Q}$-tore algébrique dans $G_{\mathbb{Q}}$. Une sous-donnée de Shimura (H, X_H) de (G, X) est dite T-spéciale si T est la composante connexe du centre du groupe de Mumford-Tate générique H' de X_H. On peut sans perte de généralité supposer que $H = H'$. Alors $H = \mathrm{TH}^{der}$. Soit S comme précédemment. Une sous-variété T-spéciale de S est une sous-variété de Shimura de S que l'on peut définir à partir d'une sous-donnée de Shimura T-spéciale. Si T est triviale, une sous-variété T-spéciale est juste une sous variété fortement spéciale.*

Une variante simple de la preuve du théorème 5.1 donne le résultat suivant.

Théorème 5.8 *Soit T un tore dans $G_{\mathbb{Q}}$. Soit Z_n une suite de sous-variétés T-spéciales de S. Soit μ_n la suite de mesures associée. Il existe une sous-suite μ_{n_k} et une sous-variété T-spéciale Z tels que $\mu_{n_k} \to \mu_Z$. De plus $Z_{n_k} \subset Z$ pour tout k.*

Références

[1] Y. André, *Finitude des couples d'invariants modulaires singuliers sur une courbe algebrique plane non modulaire.* J. reine angew. Math. **505** 1998, 203-208.

[2] Y. André, *Mumford-Tate groups of mixed Hodge structures and the theorem of the fixed part.* Compositio Math. 82 (1992), no. 1, 1–24.

[3] W. L. Baily, A. Borel, *Compactification of arithmetic quotients of locally symmetric varieties.* Ann. of Math., **84** (1996) 442–528.

[4] J. Bertin, C. Peters *Variations de structures de Hodge, variétés de Calabi-Yau et symétrie miroir* dans *Introduction à la théorie de Hodge* Panoramas et Synthèses **3**. S. M. F. (1996).

[5] D. Bertrand, *Minimal heights and polarizations on abelian varieties* MSRI, Preprint 06220-87, Berkeley, June 1987.

[6] C. Birkenhacke, H. Lange, *Complex abelian varieties.* Springer-Verlag, volume 302 1992.

[7] E. Bombieri, U. Zannier, *Heights of algebraic points on subvarieties of abelian varieties*, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 23(4) :779–792 (1997), 1996.

[8] A. Borel, *Density properties of certain subgroups of semisimple groups without compact components* ,Ann. of Math. (2) **72** (1960), 179-188.

[9] A. Borel, *Linear Algebraic Groups*, Second Enlarged Edition. Graduate texts in Maths **126** Springer.

[10] A. Borel, *Introduction aux groupes arithmétiques*, Publication de l'institut de Mathématiques de l'université de Strasbourg XV. Hermann 1969.

[11] L. Clozel, E. Ullmo, *Equidistribution des points de Hecke*, Contributions to automorphic forms, geometry, and number theory, 193254, Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, MD, 2004.

[12] L. Clozel, E Ullmo, *Equidistribution de sous-variétés spéciales*, Annals of Maths **161** (2005), 1571–1588.

[13] L. Clozel, E Ullmo, *Equidistribution de mesures algébriques*, Compositio **141** (2005), 1255-1309.

[14] L. Clozel, H. Oh, E. Ullmo, *Hecke operators and equidistribution of Hecke points*, Invent. Math. **144** (2001), no. 2, 327351.

[15] S.G Dani, G.A Margulis, *Asymptotic behaviour of trajectories of unipotent flows on homogeneous spaces*, Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.) vol **101** No **1** (1991), 1–17.

[16] S. David, M. Hindry, *Minoration de la hauteur de Néron-Tate sur les variétés abéliennes de type C. M*, J. Reine Angew. Math. **529** (2000), 1–74.

[17] P. Deligne, *Travaux de Shimura*, Séminaire Bourbaki, Exposé 389, Fevrier 1971, Lecture Notes in Maths. **244**, Springer-Verlag, Berlin (1971), p. 123-165.

[18] P. Deligne, *Variétés de Shimura : interprétation modulaire et techniques de construction de modèles canoniques*, dans *Automorphic Forms, Representations, and L-functions* part. **2** ; Editeurs : A. Borel et W Casselman ; Proc. of Symp. in Pure Math. **33**, American Mathematical Society, (1979), p. 247–290.

[19] P. Deligne, *La conjecture de Weil pour les surfaces K3*, Invent. Math. **15** (1972), 206–226.

[20] P. Deligne, M. Rapoport, *Les schmas de modules de courbes elliptiques.* dans *Modular functions of one variable, II* (Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp, Antwerp, 1972), pp. 143316. Lecture Notes in Math., Vol. 349, Springer, Berlin, 1973.

[21] M. Demazure, A. Grothendieck, *Schémas en groupes*, SGA 3 tome III. Lecture Notes in Maths. **153**, Springer (1970).

[22] B. Dodson, *The structure of Galois groups of CM-fields.* Trans. Amer. Math. Soc. **283** (1984), no. 1, 132,

[23] B. Edixhoven, *Special points on the product of two modular curves*, Compositio Mathematica **114**, 315-328 (1998).

[24] B. Edixhoven, *Special points on products of modular curves*, Duke Math. J. **126** (2005), no. 2, 325–348.

[25] B. Edixhoven, A. Yafaev *Subvarieties of Shimura varieties*, Ann. Math. (2) **157**, (2003), p. 621–645.

[26] A. Eskin, S. Mozes, N. Shah, *Non divergence of translates of certain algebraic measures*, GAFA, **7** (1997), 48-80.

[27] W. Fulton, *Intersection Theory*, Springer, Second edition, 1998.

[28] S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, Corrected reprint of the 1978 original. Graduate Studies in Mathematics, **34**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. xxvi+641 pp.

[29] M. Hindry, *Autour d'une conjecture de Serge Lang* Invent. Math., 94(3) :575–603, 1988.

[30] E. Hrushovski, *The Manin-Mumford conjecture and the model theory of difference fields*, Ann. Pure Appl. Logic **112** (2001), no. 1 43–115.

[31] B. Klingler, A. Yafaev, *The André–Oort conjecture*, preprint 2006.

[32] S. Lang, *Algebraic number theory* second edition, Springer Verlag, Graduate Texts in Maths. **110** (1994).

[33] G.A. Margulis, *Discrete Subgroups of semi-simple Lie groups*, Springer-Verlag (1989).

[34] D. Masser, G. Wüstholz, *Periods and minimal abelian subvarieties*, Ann. of Math. (2), 137(2) :407–458, 1993.

[35] J. Milne, *Canonical models of (mixed) Shimura varieties and automorphic vector bundles*, dans *Automorphic Forms, Shimura Varieties and L-functions* , Perspective in Math. **10** (1990), 283-414.

[36] J. Milne, *Shimura varieties and motives*, dans *Motives* (Seattle, WA, 1991), . 447–523, Proc. Sympos. Pure Math., **55** Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[37] J.Milne *Introduction to Shimura varieties.* Clay Math. Proceedings **4** (2005) p. 265–378.

[38] T. Miyake, *Modular forms*, Traduit du japonais par Yoshitaka Maeda. Springer-Verlag, Berlin, (1989) 335 pp.

[39] B. Moonen, *Linearity properties of Shimura varieties I* , Journal of Algebraic Geometry **7** (1998), p. 539-567.

[40] B. Moonen, *Models of Shimura varieties in mixed characteristics*, Galois representations in arithmetic algebraic geometry (Durham, 1996), 267350, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 254, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.

[41] D. Mumford, *On the Kodaira dimension of the Siegel modular variety*, Lecture Notes in Math. **997**, Springer, Berlin, (1983), p. 348-375.

[42] S. Mozes, N. Shah, *On the space of ergodic invariant measures of unipotent flows*, Ergod. Th. and Dynam. Sys. **15** (1995), 149-159.

[43] M. Nori, *On subgroups of* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$, Invent. Math. **88** (1987), 257–275.

[44] R. Pink *Arithmetical compactification of mixed Shimura varieties* Dissertation (1989), Bonner Mathematische Schriften 209. available at authors homepage http ://www.math.ethz.ch/ pink/publications.html

[45] R. Pink, D.Roessler, *On Hrushovski proof of the Manin-Mumford conjecture* J. Algebraic Geom. **13**, (2004), no. 4, 771–798.

[46] V. Platonov, A. Rapinchuk, *Algebraic Groups and Number Theory*, Academic Press, Pure and Applied Mathematics series **139**.

[47] Y.-S. Tai, *On the Kodaira dimension of the moduli space of abelian varieties*, Invent. Math. **68**, (1982), no 3, p. 425–439.

[48] M.S. Raghunathan, *Discrete subgroups of Lie groups*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band **68**. Springer-Verlag, New York-Heidelberg,

[49] M. Ratner, *On Raghunathan's measure conjecture*, Ann. Math. **134** (1991), 545-607.

[50] M. Ratner, *Raghunathan's topological conjecture and distribution of unipotent flows*, Duke Math. J. **63** (1991), 235-280.

[51] M. Raynaud, *Sous-variétés d'une variété abélienne et points de torsion*, Arithmetic and Geometry, Vol. I Progr. Math. 35, Birkhauser Boston, MA, (1988).

[52] J.-P. Serre, *Complex Multiplication*, Algebraic Number Theory, édité par J. Cassels et A. Fröhlich, chap. XIII, Acad. Press, (1967), 292–296.

[53] J-P. Serre, *Quelques applications du théorème de densité de Chebotarev*, Publications Mathématiques de lIHES **54** (1981), 123–202

[54] J.-P. Serre, *Œuvres. Collected papers. IV.* Springer-Verlag, Berlin, 2000. 1985–1998.

[55] N. Shah, *Uniformly distributed orbits of certain flows on homogeneous spaces*, Math. Ann. **289**, (1991) p. 315–334.

[56] J. H. Silverman, *The arithmetic of elliptic curves*, Graduate texts in Maths **106**, Springer (1986).

[57] E. Ullmo, Positivité et discrètion des points algébriques des courbes, *Annals of Maths* **147** (1998), 167–179.

[58] E. Ullmo *Points rationnels des sous-variétés de Shimura*, IMRN **76** (2004), p. 4109–4125.

[59] E. Ullmo *Equidistribution de sous-variétés spéciales II*, J. Reine Angew. Math. **606** (2007), 193216.

[60] E. Ullmo, *Manin-Mumford, André-Oort, the equidistribution point of view.* NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., 237, Springer, Dordrecht, (2007) 103–138.

[61] E. Ullmo, A. Yafaev, *Galois orbits and equidistribution of special subvarieties of Shimura varieties : towards the André-Oort conjecture.* preprint 2006.

[62] E. Ullmo, A. Yafaev, The André-Oort conjecture for products of modular curves. Arithmetic geometry, Clay Math. Proc., **8**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2009) 431–439.

[63] G. van de Geer *Hilbert modular surfaces.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3. Folge. Band **16**. Springer (1988).

[64] C. Voisin *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe.* Cours Spcialisés **10**. Socit Mathmatique de France, Paris, (2002) viii+595 pp.

[65] J.-P. Wintenberger, *Démonstration d'une conjecture de Lang dans des cas particuliers*, J. Reine Angew. Math., **553**, 1–16, (2002).

[66] A. Yafaev, *A conjecture of Yves André*, Duke Math. J. **132** (2006), no. 3, 393–407.

[67] A. Yafaev, *Special points on products of two Shimura curves*, Manuscripta Mathematica, **104**, 2001, 163-171.

[68] A. Yafaev, *On a result of Moonen on the moduli space of principally polarized abelian varieties*, Compositio Math. **141** (2005) no 5, 1103–1108.

[69] S. Zhang, *Equidistribution of small points on abelian varieties,* Annals of Maths **147** (1998), p. 159–165.